

تصحيح الرياضيات 2016 الدورة العادية

الأستاذ : الوظيفي

التمرين الأول :

(1) ليكن n من \mathbb{N} :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 3 \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{3 + u_n - 15 + 3u_n}{5 - u_n}$$

$$= \frac{4u_n - 12}{5 - u_n}$$

$$= \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)} \quad \text{ومنه}$$

* بين أن $u_n < 3$ لكل n من \mathbb{N}

← من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 < 3$ لأن $u_0 = 2$

← ليكن n من \mathbb{N}

نفترض أن $u_n < 3$ ولنبين أن $u_{n+1} < 3$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)} \quad \text{لدينا}$$

وبما أن $u_n < 3$ فإن $u_n - 3 < 0$

بالتالي : $2(u_n - 3) < 0$

وبما أن $u_n < 3$ فإن $0 < 3 - u_n$

وبالتالي $0 < 2 + (3 - u_n)$

$$u_{n+1} - 3 < 0 \quad \text{أي} \quad \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)} < 0 \quad \text{ومنه}$$

أي $u_{n+1} < 3$

← وبالتالي : $u_n < 3$ لكل n من \mathbb{N}

(2)- أ-

ليكن n من \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} \\ &= \frac{3 + u_n - 1}{5 - u_n} \\ &= \frac{3 + u_n}{3 - \frac{3 + u_n}{5 - u_n}} \\ &= \frac{3 + u_n - 5 + u_n}{15 - 3u_n - 3 - u_n} \\ &= \frac{2u_n - 2}{-4u_n + 12} \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \end{aligned}$$

إذن $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

استنتاج : بما أن (v_n) هندسية أساسها $1/2$

فإن $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

ولدينا : $v_n = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = 1$

إذن $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

(2)- ب-

ليكن n من \mathbb{N} :

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$

إذن $3v_n - v_n u_n = u_n - 1$

بالتالي :

$$u_n + v_n u_n = 3v_n + 1$$

$$u_n(1 + v_n) = 3v_n + 1$$

ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ لكل } n \quad u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

* نكتب u_n بدلالة n :

لدينا :

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ و } u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(2) -ج-

بما أن

$$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ فإن } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim u_n = 1$$

التمرين 2:

(1) - أ-

لدينا

$$\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$$

و

$$\overrightarrow{AC}(0; 1; -2)$$

إذن

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ومنه

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

(1) - ب-

لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على (ABC)

إذن معادلة المستوى (ABC) تكتب على شكل:

$$2x + 2y + z + d = 0$$

حيث d عدد حقيقي نحدد 0.

ولدينا : $A \in (ABC)$ إذن $4 + 2 + 3 + d = 0$

$$d = -9 \quad \text{أي}$$

ومنه : معادلة (ABC) هي : $2x + 2y + z - 9 = 0$

(2)- أ-

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (S) \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + z^2 = 34 \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 1)^2 - 1 + z^2 = 34$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 36$$

ومنه مركز (S) هو $\omega(1, -1, 0)$ وشعاعها هو 6

(2)- ب-

$$d(\omega, (ABC)) = \frac{|2 * 1 + 2(-1) + 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

بما أن $d(\omega, (ABC)) < 6$

فإن (ABC) يقطع (S) وفق دائرة (r)

(3)- أ-

لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC)

بما أن (Δ) عمودية على (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ موجهة للمستقيم (Δ)

ولدينا $\omega \in (\Delta)$

إذن تمثيل باراميتري ل (Δ) هو :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(3)- ب- مركز الدائرة (r) هو المسقط العمودي للنقطة ω على المستوى (ABC) أي نقطة تقاطع (ABC) و (Δ)

بتعويض إحداثيات B في التمثيل الباراميتري للمستقيم (Δ) نجد :

$$t = 1 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 1 = -1 + 2t \\ 1 = t \end{cases}$$

$B \in (\Delta)$ وهذا يعني أن

$B \in (ABC)$ ولدينا

إذن B هي نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

ومنه B مركز (r)

ملاحظة : يمكن تحديد مركز الدائرة (r) على النظمة :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad 2x + 2y + z - 9 = 0$$

التمرين الثالث :

1) مميز المعادلة هو :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 * 1 * 29 = -100$$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{100}}{2} = 2 - 5i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 2 + 5i$$

$$S = \{2 - 5i, 2 + 5i\}$$

إذن

2) - أ-

$$u = b - \omega$$

$$= 5 + 8i - 2 + 5i$$

$$= 3 + 3i$$

$$|u| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

* لدينا

$$u = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

إذن

$$= 3\sqrt{2} \left(\frac{\cos \pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\arg(u) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

ومنه

(2) - ب- بما أن \bar{u} مرافق u

$$\arg(\bar{u}) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{فإن}$$

(2) - ج -

$$\begin{aligned} a - \omega &= (5 + 2i) - (2 + 5i) \\ &= 3 - 3i \\ &= \bar{u} \end{aligned}$$

$$\omega A = |a - \omega| = |u| \quad \text{لدينا}$$

$$\omega B = |b - \omega| = |\bar{u}| = |u| \quad \text{و}$$

$$\omega A = \omega B \quad \text{إن}$$

$$\arg \frac{b - \omega}{a - \omega} \equiv \arg \left(\frac{u}{\bar{u}} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg \left(\frac{u}{\bar{u}} \right) \equiv \arg(u) - \arg(\bar{u}) \quad [2\pi]$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

$$\arg \frac{b - \omega}{a - \omega} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{إن}$$

(2) - د - لدينا:

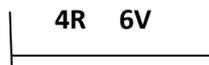
$$\begin{cases} \omega A = \omega B \\ \arg \frac{b - \omega}{a - \omega} \equiv \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad [2\pi]$$

$$\begin{cases} \omega A = \omega B \\ (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad [2\pi] \quad \text{إن}$$

و بالتالي صورة A بالدوران R

الذي مركزه ω وزاويته هي B

التمرين الرابع:



(1) نسحب في آن واحد :

إذن كل نتيجة للتجربة هي تألفيه لعنصرين من بين 10 عناصر

ومنه $card \omega = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

الحدث A يعني سحب كرتين حمراوين

إن $card A = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

ومنه $P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

(2) أ -

قيم X هي 2 عند سحب كرتين حمراوين .

3 عند سحب كرة حمراء و كرة خضراء

4 عند سحب كرتين خضراوين

ومنه مجموعة قيم X هي {2, 3, 4} .

(2) ب -

الحدث {X=3} يعني سحب كرة حمراء و كرة خضراء .

إن $card (X = 3) = C_4^1 \cdot C_6^1 = 24$

ومنه $P(X = 3) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

$$P(X = 2) = P(A) = \frac{2}{15}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{5}{15}$$

قانون احتمال X هو :

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

مسألة:

(1) أ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 2 + e^x(e^x - 4)) = -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

(1) ب -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 4e^x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(e^x - 4) = 0$$

إذن المستقيم $(\Delta): y = 2x - 2$ مقارب لـ C_f بجوار $-\infty$

(2) - أ -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2 + e^x(e^x - 4)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

لأن

(2) - ب -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x} (e^x - 4) \right) = +\infty$$

هندسيا C_f يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب جوار $+\infty$

(3) - أ - لكل x من \mathbb{R} لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2(e^{2x} - 2e^x + 1) \\ &= 2(e^x - 1)^2 \end{aligned}$$

(3) - ب - لدينا $f'(x) \geq 0$ لكل x من \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

إذن f تزايدية قطعا على \mathbb{R}

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $-\infty$  $+\infty$ </div>		

(3) - ج - الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $[1; \ln 4]$ $f(1) * f(\ln 4) = \dots < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1; \ln 4[$ حسب مبرهنة القيم الوسطية $f(\alpha) = 0$

ومنه يوجد α من $]1; \ln 4[$ حيث $f(\alpha) = 0$

(4)- أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) - (2x - 2) &= e^{2x} - 4e^x \\
 &= e^x(e^x - 4)
 \end{aligned}$$

لدينا $e^x > 0$

إذن إشارة $f(x) - (2x - 2)$ هي إشارة $e^x - 4$

$$\begin{aligned}
 e^x - 4 = 0 &\Leftrightarrow e^x = 4 & e^x - 4 > 0 &\Leftrightarrow e^x > 4 \\
 x = \ln 4 & & &\Leftrightarrow x > \ln 4
 \end{aligned}$$

ومنه $] \ln 4, +\infty[\quad x \quad f(x) - (2x - 2) > 0$

و $] -\infty, \ln 4[\quad x \quad f(x) - (2x - 2) < 0$

وبالتالي Cf يوجد فوق (D) على $] \ln 4; +\infty[$

و Cf يوجد تحت (D) على $] -\infty; \ln 4[$

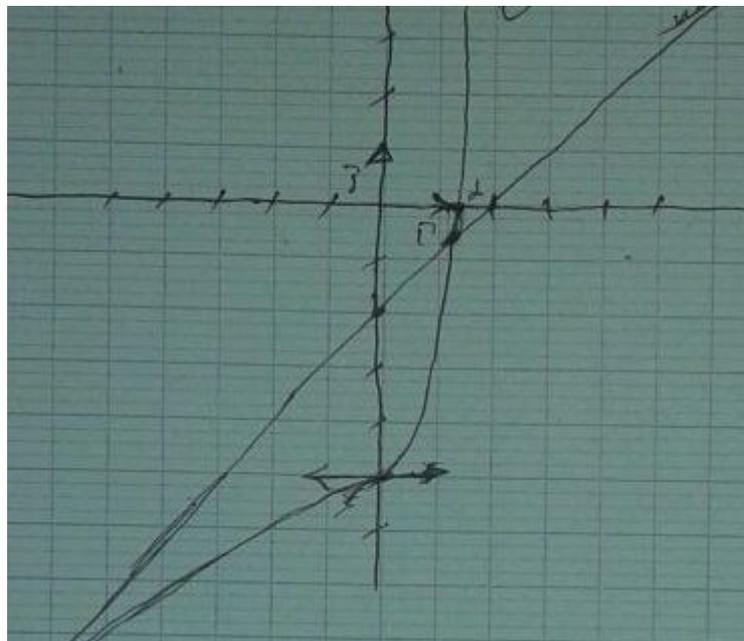
(4)- ب- لكل x من \mathbb{R} لدينا:

$$f''(x) = 4(e^x - 1)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} e^x - 1 &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

بما أن f'' تنعدم في 0 مع تغيير إشارتها فإن $I(0, -5)$ نقطة انعطاف Cf

(4)- ج- إنشاء Cf :



(5) - أ -

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx &= \left[\frac{e^{2x}}{2} - 4e^x \right]_0^{\ln 4} \\ &= \left(\frac{e^{2\ln 4}}{2} - 4e^{\ln 4} \right) - \left(\frac{1}{2} - 4 \right) \\ &= (8 - 16) + \frac{7}{2} \\ &= -8 + \frac{7}{2} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

(5) - ب - المساحة هي:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\ln 4} |f(x) - (2x - 2)| dx \quad ua \\ &= \int_0^{\ln 4} |e^{2x} - 4e^x| dx \quad * 1cm^2 \end{aligned}$$

$$1 \leq e^x \leq 4 \quad \text{إذن} \quad 0 \leq x \leq \ln 4$$

$$e^x(e^x - 4) \leq 0 \quad \text{وبالتالي} \quad e^x - 4 \leq 0$$

ولدينا

أي

ومنه :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\ln 4} (4e^x - e^{2x}) dx \quad . cm^2 \\ &= - \int_0^{\ln 4} e^{2x} - 4e^x dx \quad . cm^2 \end{aligned}$$

3-أ- نعتبر المعادلة المميزة ب E هي :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 * 1 * 2 = 1$$

$$r_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

إذن

ومنه حلول (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} - بما يلي

$$x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$$

مع α و β من \mathbb{R}

(1) - ب- لدينا g حل المعادلة (E):

$$(\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x} \quad \text{ولدينا}$$

$$g'(0) = \alpha + 2\beta \quad \text{و} \quad g(0) = \alpha + \beta \quad \text{إن}$$

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = -4e^x + e^{2x} \quad \text{وبالتالي}$$

(2)

الدالة $e^{2x} - 4e^x$ $x \mapsto e^{2x} - 4e^x$ قابلة الاشتقاق على $] \ln 4; +\infty[$ و $e^{2x} - 4e^x > 0$; $\forall x \in] \ln 4; +\infty[$

$$x \mapsto \ln(e^{2x} - 4e^x) \quad \text{إن الدالة}$$

$$\forall x > \ln 4 ; \quad h'(x) = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} + 4e^x} \quad \text{و}$$

$$= \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4}$$

$$\begin{cases} e^2 - 2 > 2 \\ e^x - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{بما أن } x > \ln 4 \text{ فإن}$$

ومنه h تزايدية قطعاً على $] \ln 4; +\infty[$

ولدينا h متصلة على $] \ln 4; +\infty[$ لأنها قابلة للاشتقاق عليه

إن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على المجال J حيث :

$$J = h(] \ln 4; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow \ln 4^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[$$

$$t = e^{2x} - 4e^x \quad \text{نضع}$$

$$(x \rightarrow (\ln 4)^+) \Rightarrow (t \rightarrow 0^+) \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 4^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty \quad \text{إن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x(e^x - 4)) = +\infty \quad \text{ولدينا}$$

$$J =]-\infty; +\infty[$$

(2) - ب - لدينا :

$$h(\ln 5) = \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5})$$

$$= \ln(25 - 20) = \ln 5$$

$$(h^{-1})'(\ln 5) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\ln 5))} = \frac{1}{h'(\ln 5)}$$

$$(h^{-1})(\ln 5) = \frac{1}{32} \quad \text{ومنه} \quad h'(\ln 5) = 2(e^{\ln 5} - 1)^2 = 32 \quad \text{والدينا}$$