التمرين الأول : (3,5 ن)

■ 1

ننطلق من الكتابة : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2} i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} z - e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z_1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{VM_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي : r دوران مركزه $V(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و لدينا كذلك : $h(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2z + 3i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2z + 2i + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2(z - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad (z_2 - i) = -2(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{VM_2} = -2\, \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ و نسبته -2

■ 2 أ

ننطلق من الشكل التالي :

$$\begin{array}{ccccc} & & F = hor & & \\ M & \xrightarrow{\;r\;} & M_1 & \xrightarrow{\;h\;} & M' \\ z & \longrightarrow & z_1 & \longrightarrow & z' \end{array}$$

لدينا : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow \quad (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - i) + i} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $h(z_1) = z'$

$$\Leftrightarrow \quad (z' - i) = -2(z_1 - i)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad (z' - i) = -2 e^{i\frac{\pi}{3}} (z - i)$$

و لدينا :

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

إذن :

$$\boxed{(z' - i) = 2 e^{\frac{4i\pi}{3}} (z - i)}$$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال أ

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\;F\;} & M' \\ z & \longrightarrow & z' = 2 e^{\frac{4i\pi}{3}} (z - i) + i \end{array}$$

لنحل المعادلة : $F(M) = M$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(2 e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right) = 2i e^{\frac{4i\pi}{3}} - i$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(2 e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right) = i\left(2 e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = i$$

$$\Leftrightarrow \quad M \equiv \Omega$$

و بالتالي : Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(M) = M$

■ 3 أ

لدينا : $F(A) = B$

$$\Leftrightarrow \quad z_B - i = 2 e^{\frac{4i\pi}{3}} (z_A - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = 2 e^{\frac{4i\pi}{3}} (a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = 2\left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = (1 + i\sqrt{3})(i - a) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3} i + i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_B = -(a + \sqrt{3}) + i(2 - a\sqrt{3})}$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابتين $F(B) = C$ و $F(C) = D$ لنحصل على :

$$\boxed{z_C = 2(\sqrt{3} - a) + i(2a\sqrt{3} + 3)}$$

و $\boxed{z_D = 8a - 7i}$

■ 3 ب

لدينا : $\dfrac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{i - a}{8a - 7i - a} = \dfrac{-1}{7} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7}(z_D - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD}$$

و بالتالي : النقط A و Ω و D نقط مستقيمية .

■ 3 ج

لدينا : $\dfrac{4z_B + 2z_C + z_D}{7} = \dfrac{7i}{7} = z_\Omega$

نستنتج إذن أن : النقطة Ω هي مرجح النظمة المتزنة :

$\{(B,4); (C,2); (D,1)\}$

■ 3 د

ننطلق من كون D نقطة من المحور الحقيقي . و نضع : $a = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad z_D \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (8a - 7i) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (8y - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{7}{8}}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي. و معادلته : $y = \frac{7}{8}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ 1 أ

$$1 - 3(x * y) = 1 - 3(x + y - 3xy)$$
$$= 1 - 3x - 3y + 9xy$$
$$= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x)$$
$$= (1 - 3x)(1 - 3y)$$

■ 1 ب

لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad y \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3x) \neq 0 \quad \text{و} \quad (1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 3(x * y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x * y) \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x * y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

التجميعية : ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $x * (y * z) = x * (y + z - 3yz)$

$$= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz)$$
$$= \boxed{x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz}$$

و لدينا : $(x * y) * z = (x + y - 3xy) * z$

$$= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy)$$
$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

التبادلية : لدينا : $x * y = x + y - 3xy$

$$= y + x - 3yx$$
$$= y * x$$

إذن تبادلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

العنصر المحايد : ليكن e العنصر المحايد في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \; ; \; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x + e - 3xe = x$$

$$\Leftrightarrow \quad e(1 - 3x) = 0$$

بما أن $x \neq \frac{1}{3}$ فإن $(1 - 3x) \neq 0$

إذن : $e = 0$

مع : $e \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ لأن : $0 \neq \frac{1}{3}$

التماثل : ليكن x' مماثل x بالنسبة لـ $*$

$$\Leftrightarrow \quad x*x' = x'*x = e$$
$$\Leftrightarrow \quad x + x' - 3xx' = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x'(1-3x) = -x$$
$$\Leftrightarrow \quad x' = \frac{-x}{(1-3x)}$$

و لدينا : $1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1-3x \neq -3x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-3x} \neq \frac{-1}{3x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-3x} \neq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-3x} \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

و منه : كل عنصر x من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-x}{1-3x}\right)$ في $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ بالنسبة للقانون $*$.

خلاصة : $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ زمرة تبادلية .

■ ②أ

لدينا :

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & (\mathbb{R}^*;\times) \\ x & \longrightarrow & 1-3x \end{array}$$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $\varphi(x*y) = 1-3(x*y)$

و منه حسب السؤال ①أ

$$\varphi(x*y) = (1-3x)(1-3y) = \varphi(x)\times\varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*;\times)$

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^*$

المعادلة $\varphi(x)=y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا و هو : $x=\frac{1-y}{3}$

إذن φ تقابل من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*;\times)$

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*;\times) & \xrightarrow{\quad\varphi^{-1}\quad} & \left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) \\ y & \longrightarrow & \dfrac{1-y}{3} \end{array}$$

■ ②ب

لدينا : $\varphi'(x) = -3 < 0$

إذن φ دالة تناقصية على $\mathbb{R}$

و منه : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \varphi^{-1}(]0;+\infty[)$

$$= \left]\lim_{y\to+\infty}\varphi^{-1}(y)\ ;\ \varphi^{-1}(0)\right[$$
$$= \left]\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{y}{3}\right)\ ;\ \frac{1}{3}\right[$$
$$= \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$$

■ ②ج

لدينا : $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ جزء غير فارغ من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

يعني : $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\subset \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

لدينا : $x*y' = x*\left(\frac{-y}{1-3y}\right)$

$$= x - \frac{y}{1-3y} + \frac{3xy}{1-3y}$$
$$= \frac{x(1-3y)-y+3xy}{1-3y}$$
$$= \frac{x-y}{1-3y}$$

و لدينا x و y عنصرين من $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$

إذن : $x<\frac{1}{3}$ و $y<\frac{1}{3}$

و منه : $3x<1$ و $3y<1$

إذن : $\boxed{3x-3y<1-3y}$ (1) و $\boxed{(1-3y)>0}$ (2)

نضرب طرفي المتفاوتة (1) في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1-3y}\right)$ نحصل على :

$$\frac{3x-3y}{1-3y} < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{1-3y} < \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{1-3y} \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$$
$$\Leftrightarrow \quad x*y' \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$$

و بالتالي : $\left(\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[\ ;*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$

■ 3) أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا : $\varphi\left(x^{(n)}\right)=\varphi\left(\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n\text{ مرة}}\right)$

$$\Leftrightarrow\ \varphi\left(x^{(n)}\right)=\ \varphi(x)\times\varphi(x)\times\cdots\times\varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \varphi\left(x^{(n)}\right)=\ \left(\varphi(x)\right)^{n}$$

■ 3) ب

ننطلق من الكتابة : $\varphi\left(x^{(n)}\right)=\ \left(\varphi(x)\right)^{n}$

$$\Leftrightarrow\ 1-3x^{(n)}=\ (1-3x)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^{(n)}=\frac{1-(1-3x)^{n}}{3}}$$

■ 4) أ

لدينا $\top$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$

لأن : $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad;\quad x+y-\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$

- $\top$ تبادلي في $\mathbb{R}$ لأن $+$ تبادلي في $\mathbb{R}$.

و لدينا : $x\top(y\top z)=x\top\left(x+y-\frac{1}{3}\right)$

$$=x+x+y-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=(x\top y)\top z$$

- إذن $\top$ قانون تجميعي في $\mathbb{R}$

ليكن e العنصر المحايد لـ $\top$ في $\mathbb{R}$. $\quad x\top e=e\top x=x\quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad x+e-\frac{1}{3}=x$$

$$\Leftrightarrow\quad e=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و x' مماثله بالنسبة لـ $\top$

$$\Leftrightarrow\quad x\top x'=x'\top x=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad x+x'-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad x'=\left(\frac{2}{3}-x\right)\in\mathbb{R}$$

- و بالتالي : $\boxed{(\mathbb{R},\top)\ \text{زمرة تبادلية.}}$

■ 4) ب

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}$

لدينا : $x*(y\top z)=x*\left(y+z-\frac{1}{3}\right)$

$$=\boxed{2x+y+z-3(xy+xz)-\frac{1}{3}}$$

و لدينا : $(x*y)\top(x*z)=(x+y-3xy)\top(x+z-3xz)$

$$=\boxed{2x+y+z-3(xy+xz)-\frac{1}{3}}$$

نستنتج إذن أن : $x*(y\top z)=(x*y)\top(x*z)$

إذن القانون $*$ توزيعي على القانون $\top$ $\quad(1)$

و لدينا : $(\mathbb{R},\top)$ و $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ زمرتان تبادليتان. $\quad(2)$

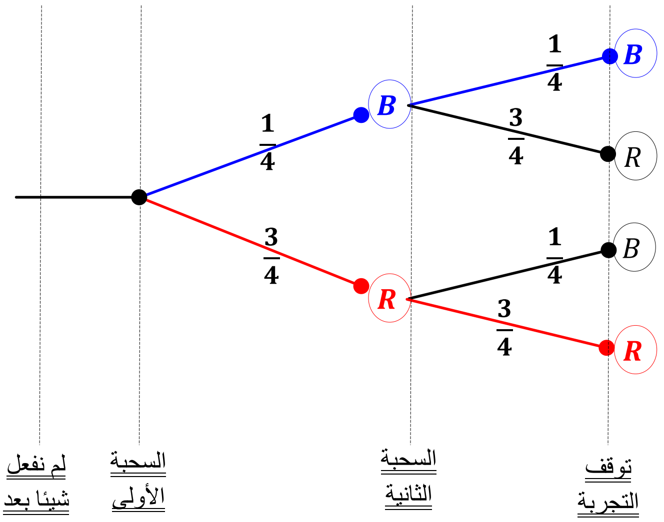
إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

■ 1)

$p[X=2]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :

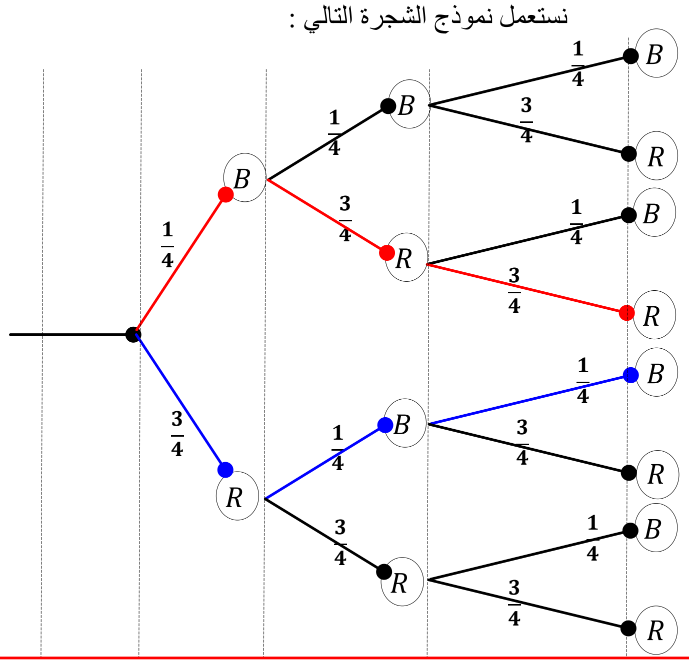


و منه احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p[X=2]=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)=\boxed{\frac{5}{8}}$$

$p[X=3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :



إذن : $p[X=3]=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{16}}$

■ ② أ

$p[X=2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $2k$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

الحالة الأولى: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{BR}_{1}\ \underbrace{BR}_{2}\cdots\cdots\underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{\mathbf{BB}}_{k}}^{2k\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة بيضاء و $(k-1)$ كرة حمراء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$

الحالة الثانية: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{RB}_{1}\ \underbrace{RB}_{2}\cdots\cdots\underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{\mathbf{RR}}_{k}}^{2k\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و $(k-1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $(2k)$ هو :

$$p[X=2k]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k]=\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}\times\left(\frac{5}{8}\right)$$

■ ② ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{RB}_{1}\ \underbrace{RB}_{2}\cdots\cdots\underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{R\mathbf{B}}_{k}\ \underbrace{\mathbf{B}}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k+1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}$

الحالة الثانية: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{BR}_{1}\ \underbrace{BR}_{2}\cdots\cdots\underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{B\mathbf{R}}_{k}\ \underbrace{\mathbf{R}}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k$ و $(2k+1)$ هو :

$$p[X=2k+1]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k+1]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k+1]=\boxed{\left(\frac{3}{16}\right)^{k}}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■(I)(1)

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to1\\ u=1+2x}}\left(\frac{2\ln u}{u-1}\right)$$

$$= 2\lim_{u\to1}\left(\frac{\ln u-\ln 1}{u-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 = \boxed{f(0)}$$

لأنه لدينا : $\boxed{(\forall x_0>0)\ ;\ \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}\right)=\frac{1}{x_0}}$

إذن f دالة متصلة في الصفر.

■(I)(2)(أ)

$$h_a(a) = (\ln(1+2a)-2a)a^2 - (\ln(1+2a)-2a)a^2 = 0$$

$$h_a(0) = -(\ln(1))a^2 = 0$$

و بما أن h_a دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0,a]$.

و $h_a(0)=h_a(a)$

فإنه حسب مبرهنة رول يوجد عنصر b من $]0,a[$ بحيث : $h'_a(b)=0$

$$\Leftrightarrow\quad 2(\ln(1+2a)-2a)b = a^2\left(-2+\frac{2}{1+2b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

■(I)(2)(ب)

لدينا : $\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right)$

$$= \lim_{\substack{a\to0\\ a=x}}\left(\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}\right)$$

لدينا حسب السؤال (أ) يوجد b مرتبط بـ a بحيث : $a<b<0$

و $\frac{ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$

إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر

و ذلك بسبب التأطير : $a<b<0$

و بالتالي النهاية تصبح :

$$\lim_{a\to0}\left(\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}\right) = \lim_{b\to0}\left(\frac{-2}{1+2b}\right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق في الصفر و $f'(0)=-2$

■(I)(3)(أ)

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $I\setminus\{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للإشتقاق على $I\setminus\{0\}$.

و لدينا : $f'(x) = \left(\frac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x) = \left(\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}}$$

■(I)(3)(ب)

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا كذلك $g'(x) = 2-\left(2\ln(1+2x)+\frac{2(1+2x)}{(1+2x)}\right)$

$$= -2\ln(1+2x)$$

إذا كان $x=0$ فإن $g'(x)=0$

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)<0$

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)>0$

و لدينا : $\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

$$= -1-\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+}(1+2x)\,ln(1+2x)$$

$$= -1-\lim_{\substack{u\to0^+\\ u=1+2x}} u\,ln(u)$$

$$= -1-0$$

$$= \boxed{-1}$$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\left(\frac{1}{x}+2\right)\ln(1+2x)\right)$$

$$= (+\infty)(-\infty)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي .

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوية

إذن : $(\forall x \epsilon I) \; ; \; g(x) \leq 0$

و بالتالي : $\boxed{\forall \, x \, \epsilon \, I \setminus \{0\} \; ; \; g(x) < 0}$

■(I)③ج

لدينا : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$

و هو ما نلخصه في الجدول التالي :

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$-$	
$(1+2x)$	0	$+$	1	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

■(I)④أ

$$\lim_{x \to \frac{-1}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{u \to 0^+ \\ u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) = \frac{2(-\infty)}{(-1)} = +\infty$$

$\boxed{\text{إذن المستقيم ذو المعادلة } x = \frac{-1}{2} \text{ مقارب عمودي للمنحنى } (\mathscr{C})}$

لدينا كذلك : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{\substack{u \to +\infty \\ u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right)$

$$= \lim_{u \to +\infty} 2 \underbrace{\left(\frac{\ln u}{u}\right)}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{u}{u-1}\right)}_{\to 1} = 0$$

$\boxed{\text{إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى} (\mathscr{C}) \text{ بجوار } +\infty \text{ .}}$

■(I)④ب

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

إذن f متصلة و تناقصية قطعا على $[1;2]$ لأن : $[1;2] \subset \left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

و منه f تقابل من $[1;2]$ نحو صورته $[f(2);f(1)]$

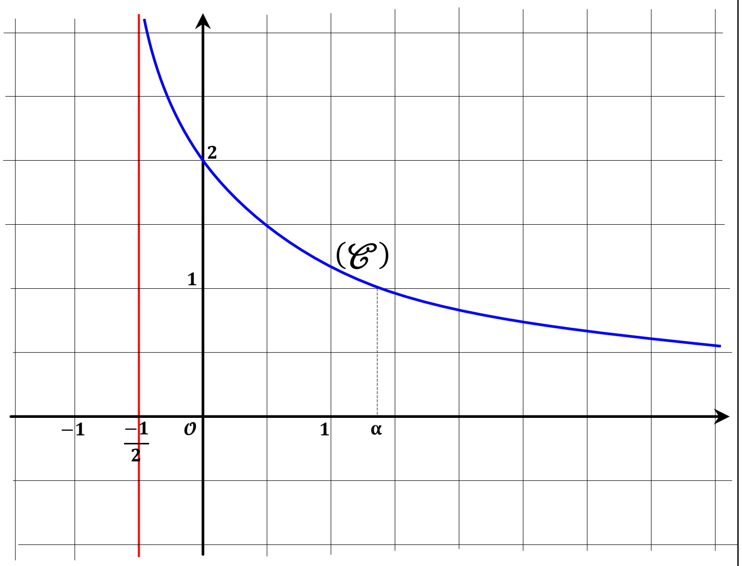
يعني f تقابل من $[1;2]$ نحو $[0{,}8 \; ; \; 1{,}1]$

و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0{,}8 \; ; \; 1{,}1]$

فإنه يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f من المجال $[1;2]$

أو بتعبير رياضياتي جميل : $\boxed{\exists! \; \alpha \; \epsilon \; [1;2] \; : \; f(\alpha) = 1}$

■(I)④ج



■(II)①أ

الدالة φ عبارة عن مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على I

إذن φ قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا : $\varphi'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$

لدينا من أجل : $x \geq 1$: $6 \leq 2+4x$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 2(1+2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi'(x) \leq \frac{2}{3}} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $x \epsilon I$ إذن : $x > \frac{-1}{2}$

و منه : $1+2x > 0$ إذن : $\frac{2}{1+2x} > 0$

يعني : $\boxed{\varphi'(x) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 1) \; ; \; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}}$$

■(II)(1)(ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال ■(I)(4)(ب) : $f(\alpha)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha$$
$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha)=\alpha$$

و لدينا : $\varphi'(x)=\frac{2}{1+2x}>0$ إذن : φ دالة تزايدية قطعا على I

و منه : $\varphi([1;\alpha])=[\varphi(1)\,;\,\varphi(\alpha)]=[\ln 3\;;\;\alpha]$

و لدينا : $[\ln 3\,;\,\alpha]\approx[1{,}1\;;\;\alpha]\subset[1;\alpha]$

إذن : $\boxed{\varphi(J)\subset J}$

■(II)(2)(أ)

باستعمال البرهان بالترجع

لدينا : من أجل $n=0$: $u_0=1\,\epsilon\,[1;\alpha]=J$

نفترض أنه : $(\forall n\geq 0)\;;\;u_n\,\epsilon\,J$

إذن : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,\varphi(J)$

و بما أن : $\varphi(J)\subset J$ فإن : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,J$

يعني : $\ln(1+2u_n)\,\epsilon\,J$ و منه : $u_{n+1}\,\epsilon\,J$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\geq 0)\;;\;u_n\,\epsilon\,J}$

■(II)(2)(ب)

لدينا الدالة φ قابلة للإستقاق على المجال I

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α .

إذن : يوجد c محصور بين u_n و α بحيث : $\boxed{\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}=\varphi'(c)}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|\varphi'(c)|$$
$$\Rightarrow |\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(c)||u_n-\alpha|$$

لدينا حسب السؤال ■(II)(1)(أ) :

$$\boxed{(\forall x\geq 1)\;;\;0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}}$$

و بما أن : $u_n\geq 1$ (لأن : $u_n\,\epsilon\,J$)

فإن : $c>u_n\geq 1$ يعني : $c\geq 1$

و منه : $0<\varphi'(c)\leq\frac{2}{3}$

يعني : $|\varphi'(c)|\leq\frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n-\alpha|$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow |\varphi'(c)||u_n-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$$
$$\Leftrightarrow |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$$

و من أجل $(n-1)$ نجد :

$$\Leftrightarrow |u_n-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_{n-1}-\alpha|$$
$$\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-2}-\alpha|$$
$$\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-3}-\alpha|$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|$$

إذن : $\boxed{|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|}$ (3)

من جهة أخرى لدينا : $\alpha>0$ يعني : $-\alpha<0$

أي : $1-\alpha<1$ و منه : $|1-\alpha|<1$

أي : $|u_0-\alpha|<1$

و منه : $\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n\geq 0)\;;\;|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

■(II)(2)(ب)

بما أن : $(\forall n\geq 0)\;;\;|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

و $\lim_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(لأنها متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1)

إذن : $\lim_{n\infty}|u_n-\alpha|=0$

أي : $\boxed{\lim_{n\infty}u_n=\alpha}$

■(III)1 أ

لدينا حسب الأسئلة السابقة : f دالة متصلة على I .

إذن f متصلة على أي مجال على شكل $[0,x]$ بحيث : $x \in I$

و منه f تقبل دالة أصلية F بحيث : $F'(x) = f(x)$

و منه : F قابلة للإشتقاق على المجال I .

■(III)1 ب

نعلم أن : $(\forall x \in I)\ ;\ f(x) > 0$

إذن : $(\forall x \in I)\ ;\ F'(x) > 0$

و منه F دالة تزايدية قطعا على I

■(III)2 أ

لدينا : $(*)\ \boxed{(\forall\, t \geq 1)\ ;\ \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1}}$

و لدينا : $(\forall t \geq 1)\ ;\ 2t+1 \geq 3 > 1$

إذن : $(\forall t \geq 1)\ ;\ \ln(2t+1) > 0$

نضرب طرفي المتفاوتة $(*)$ في العدد الموجب $\ln(2t+1)$ نحصل على :

$$\frac{\ln(2t+1)}{t} > \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t}\right) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x f(t)\, dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) - \int_1^x f(x)\, dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt} \quad (\star)$$

لدينا f متصلة على $[0;1]$

إذن التكامل : $\int_1^x f(x)\, dt$ يُعَبِّر عن قياس لمساحة موجبة

أي : $\int_1^x f(x)\, dt \geq 0$ و منه : $-\int_1^x f(x)\, dt \leq 0$

يعني : $\boxed{F(x) - \int_1^x f(x)\, dt \leq F(x)} \quad (\star\star)$

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 1)\ ;\ F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

■(III)2 ب

لاحظ أن : $[(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4\ln(1+2t)}{(1+2t)}$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}[(\ln(1+2t))^2]_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)$$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)\right) = +\infty$

فإنه بالضرورة لدينا : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

و ذلك بسبب المتفاوتة التالية :

$$\boxed{(\forall x \geq 1)\ ;\ F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

■(III)3 أ

نعتبر المجال $\left[\frac{-1}{2}\,;x\right]$ بحيث : $x \in I$

لدينا : $\tilde{F}$ دالة معرفة و متصلة على المجال $\left[\frac{-1}{2}\,;x\right]$

لأن : F متصلة على I و F متصلة على اليمين في $\frac{-1}{2}$ حسب الإفتراض

و لدينا كذلك $\tilde{F}$ قابلة للإشتقاق على $\left]\frac{-1}{2}\,;x\right[$ لأن : F قابلة للإشتقاق على I

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ \frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} = f(c)$$

$$\boxed{\exists\, c \in \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ (F(x) - \ell) = f(c)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (\#)$$

و لدينا من جهة أخرى : $c \in \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[$ يعني : $x > c$

و منه : $f(x) < f(c)$ لأن f تناقصية .

إذن : $\left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) < \left(x + \frac{1}{2}\right) f(c)$

و منه باستعمال النتيجة $(\#)$ نحصل على :

$$\boxed{(F(x) - \ell\,) \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (\circledast)$$

■(III)3 ب

المتفاوتة $(\circledast)$ تصبح : $\left(\frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}}\right) \geq f(x)$

و نعلم أن : $\lim_{x\to\frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$

و بالتالي : F غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $\frac{-1}{2}$: