

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $]0,1[$

إذن :  $0 < x < 1$  و  $0 < y < 1$

إذن :  $-1 < -x < 0$  و  $-1 < -y < 0$

إذن :  $0 < 1 - x < 1$  و  $0 < 1 - y < 1$

و منه :  $0 < (1 - x)(1 - y) < 1$  (1)

و بما أن  $xy > 0$  فإن :  $(1 - x)(1 - y) + xy > xy$

يعني : (2)  $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} < 1$

و لدينا :  $xy > 0$  و  $xy + (1 - x)(1 - y) > 0$

إذن : (3)  $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} > 0$

من (2) و (3) نستنتج أن :

$(\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} < 1$

$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < x * y < 1$

$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; x * y \in I$

إذن \* قانون تركيب داخلي في  $I$ .

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $I$

لدينا :  $x * y = \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)}$   
 $= \frac{yx}{yx + (1 - y)(1 - x)}$   
 $= y * x$

إذن \* قانون تبادلي في  $I$ .

لتكن  $x$  و  $y$  و  $z$  ثلاثة عناصر من  $I$ .

لدينا :  $x * (y * z) = \frac{x(y * z)}{x(y * z) + (1 - x)(1 - (y * z))}$   
 $= \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)}$

و بنفس الطريقة نحسب  $z * (x * y)$  نحصل على :

$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} = x * (y * z)$

و بالتالي : \* قانون تجميعي في  $I$ .

ليكن  $e$  العنصر المحايد للقانون \* في  $I$ .

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; x * e = e * x = x$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{xe}{xe + (1 - x)(1 - e)} = x$

نختزل بالعدد الغير المنعدم  $x$  نحصل على :

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{e}{xe + (1 - x)(1 - e)} = 1$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; xe + 1 - e - x + ex = e$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; e = \frac{1}{2} \epsilon ]0,1[$

إذن القانون \* يقبل عنصرا محايدا في  $I$  و هو :  $\frac{1}{2}$ .

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I = ]0,1[$  مجموعة غير فارغة
- \* قانون تركيب داخلي في  $I$ .
- \* يقبل  $\frac{1}{2}$  كعنصر محايد في  $I$ .
- \* تبادلي و تجميعي في  $I$ .

إذن لكي تكون  $(I, *)$  زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :

كل عنصر  $x$  يقبل مائلا بالقانون \* في المجموعة  $I$ .

ليكن  $x'$  مائل  $x$  في المجموعة  $I$  بالنسبة للقانون \*

إذن :  $x * x' = x' * x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1 - x)(1 - x')} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x' = (1 - x)$

بما أن :  $x \in I$  فإن  $0 < x < 1$

إذن :  $0 < 1 - x < 1$

و منه  $(1 - x)$  هو مائل  $x$  بالنسبة لـ \* في  $I$ .

و بالتالي :  $(I, *)$  زمرة تبادلية.

لدينا  $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$

إذن :  $H$  جزء غير فارغ من  $\mathbb{R}_+^*$

لأن :  $2^n \in \mathbb{R}_+^* ; (\forall n \in \mathbb{N})$

ليكن  $2^m$  و  $2^n$  عنصرين من  $H$

2 (i)

نضع :  $d = (x + 1) \wedge 18$  إذن حسب (Bezout)

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; d = 18u + (x + 1)v$$

لدينا :  $10^{x+1} \equiv 1[19]$  إذن :  $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

$$(1) \quad 10^{(x+1)v} \equiv 1[19] \text{ : يعني}$$

و لدينا كذلك :  $10^{18} \equiv 1[19]$  إذن :  $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

$$(2) \quad 10^{18u} \equiv 1[19] \text{ : يعني}$$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

$$10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19] \text{ : يعني}$$

$$10^d \equiv 1[19] \text{ : وبالتالي}$$

2 (b)

$$d = 18 \wedge (x + 1) \text{ : لدينا}$$

$$d \setminus 18 \text{ : إذن}$$

و منه :  $d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$$\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases} \text{ : ولدينا}$$

$$d = 18 \text{ : وبالتالي}$$

2 (c)

$$18 = 18 \wedge (x + 1) \text{ : لدينا}$$

$$18 / (x + 1) \text{ : إذن}$$

$$18 / (-18) \text{ : و بما أن}$$

$$18 / (x + 1) - 18 \text{ : فإن}$$

$$18 / (x - 17) \text{ : أي}$$

$$x \equiv 17[18] \text{ : و منه}$$

$$2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H \text{ : لدينا}$$

إذن :  $(H, \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{R}_+, \times)$ .

3 (b)

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $H$ .

$$\varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x}\right) * \left(\frac{1}{1+y}\right) \text{ : لدينا}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \\ &= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy) \end{aligned}$$

إذن  $\varphi$  تشاكل من  $(H, \times)$  نحو  $(I, *)$ .

3 (c)

ليكن  $2^n$  عنصرا من  $H$ .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \varphi(H) = K$$

لدينا :  $\varphi$  تشاكل من  $(H, \times)$  نحو  $(I, *)$ .

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك  $(H, \times)$  زمرة جزئية لـ  $(\mathbb{R}_+, \times)$  حسب السؤال 3 (i)

إذن  $(\varphi(H), \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(I, *)$

و بالتالي :  $(K, *)$  زمرة جزئية للزمرة  $(I, *)$ .

**التمرين الثاني : (2,5 ن)**

1 (i)

$$10^x \equiv 2[19] \text{ : لدينا}$$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد :  $10^{x+1} \equiv 20[19]$

$$20 \equiv 1[19] \text{ : من جهة أخرى لدينا}$$

$$10^{x+1} \equiv 1[19] \text{ : إذن}$$

1 (b)

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب ميرهنة (Fermat)

$$(\forall a \wedge 19 = 1) ; a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل  $a = 10$  لدينا  $10 \wedge 19 = 1$  إذن :  $10^{19-1} \equiv 1[19]$

$$10^{18} \equiv 1[19] \text{ : أي}$$

1 ■

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

2 ■

ننشر التعبير :  $(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$  نحصل على :

$$(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1 + i) \\ \alpha + 2i = -(1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1 + 4i) \\ \beta = 5i - 5 \end{cases}$$

3 ■

ليكن  $(x + iy)$  جذرا مربعا للعدد العقدي  $(5 - 12i)$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 5 - 12i \\ |x + iy| = \sqrt{5^2 + 12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) + 2ixy = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ أو } x = 3 \\ y = 2 \text{ أو } y = -2 \end{cases}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي  $5 - 12i$  هما :  $(3 - 2i)$  و  $(-3 + 2i)$

3 ■

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :

$$(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا :  $z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 5i) = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$$

$$\text{إذن : } z_1 = -1 + 3i \text{ و } z_2 = 2 + i$$

و بالتالي : المعادلة  $(E)$  تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-2i \text{ و } 2 + i \text{ و } -1 + 3i$$

1 ■

$$\text{لدينا : } \frac{a - c}{b - c} = \frac{-1 + 3i - 2 - i}{-2i - 2 - i} = \frac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$(1) \quad \left( \overline{CB}, \overline{CA} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \quad \text{و منه :}$$

$$\left| \frac{a - c}{b - c} \right| = |-i| = 1 \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(2) \quad \frac{CA}{CB} = 1 \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث  $ABC$  مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في  $C$ .

2 ■

نضع :  $M(z)$  و  $M_1(z_1)$  و  $M_2(z_2)$

$$\mathcal{R}_1(M) = M_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow (z_1 - b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \\ \Leftrightarrow (z_1 + 2i) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (z + 2i) \\ \Leftrightarrow z_1 = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i \end{cases}$$

2 ■

$$\mathcal{R}_2(M) = M_2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow (z_2 - a) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(z - a) \\ \Leftrightarrow (z_2 + 1 - 3i) = \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (z + 1 - 3i) \\ \Leftrightarrow z_2 = -\left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left( \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$

2 ■

لدينا  $I$  هي منتصف القطعة  $[M_1M_2]$ .

$$\begin{cases} \Leftrightarrow aff(I) = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3} - i - \frac{(1 - 3i)(3 + i\sqrt{3})}{2} \\ \Leftrightarrow aff(I) = \text{constante complexe} \end{cases}$$

إذن  $aff(I)$  عدد عقدي ثابت.

أي :  $I$  نقطة ثابتة في المستوى.



1 ■

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$$

2 (i) ■

ليكن  $x$  عنصرا من  $]0, +\infty[$

لدينا  $f$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  لأنها مجموع دالتين

قابلتين للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

إن  $f$  دالة تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

2 (b) ■

لدينا  $f$  دالة متصلة و تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$

إن  $f$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو صورته  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

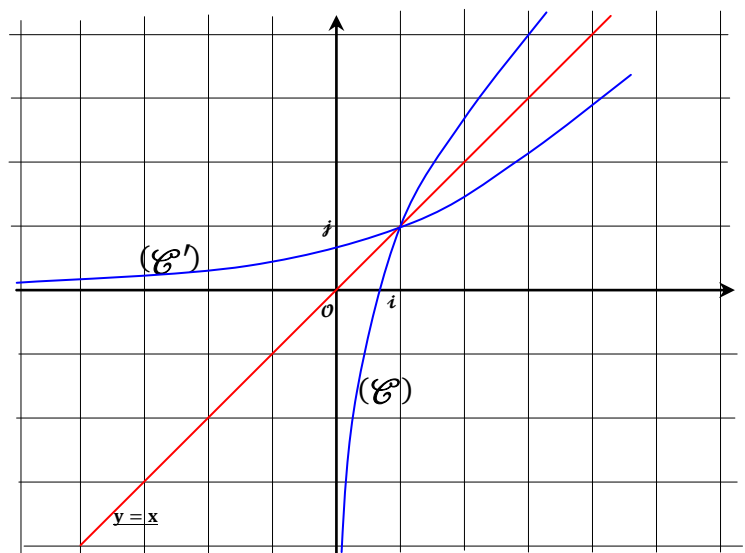
و تقابله العكسي  $f^{-1}$  دالة متصلة و تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f^{-1}$		$+\infty$
	0	

3 ■

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$

$$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3,72$$



4 (i) ■

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx \quad \text{لنحسب التكامل :}$$

من أجل ذلك نضع :  $t = f^{-1}(x)$  إذن :  $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{و منه :}$$

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e t f'(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt$$

$$= [t f(t)]_1^e - \left[ \frac{t^2}{2} + t \ln t - t \right]_1^e$$

$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4,9$$

4 (b) ■

نضع  $A$  هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)| dx$$

$$\Leftrightarrow A = \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow A = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^{e+1} - \left( \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left( \frac{e^2 + 2e}{2} \right) - \left( \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$



6

لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{x_n}{n} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(x_n) - \ln(n) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_n - \ln(n) &\leq x_n \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln(n) &\leq x_n \end{aligned}$$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

$$\text{إذن : } \underbrace{n - \ln(n)}_{+\infty} \leq x_n$$

و هذا دليل آخر على أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

6

لدينا :  $n - \ln n \leq x_n$

$$\text{إذن : } \frac{n - x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$

$$\text{و منه : } \left| \frac{n - x_n}{n} \right| \leq \frac{\ln n}{n}$$

$$\text{و بما أن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$$

$$\text{فإن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n - x_n}{n} \right| = 0$$

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$$

و لدينا حسب السؤالين (i) و (ii) :  $n - \ln n \leq x_n \leq n$

$$\text{إذن : } \frac{n - \ln n}{n - \ln n} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$$

$$\text{يعني : } 1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$$

$$\text{و بما أن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n - \ln n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}}\right) = 1$$

$$\text{فإن : } \underbrace{1}_{1} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$$

$$\text{و بالتالي : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right) = 1$$

5

نضع :  $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا  $h$  دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

$$\text{و لدينا كذلك : } h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

إذن  $h$  دالة تزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$

و منه  $h$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو صورته  $]-\infty, +\infty[$

و بما أن :  $0 \in ]-\infty, +\infty[$  فإنه يمتلك سابقاً واحداً  $x_n$  بالتقابل  $h$ .

$$\text{يعني : } \exists! x_n \in ]0, +\infty[ ; h(x_n) = 0$$

$$\text{بتعبير آخر : } \exists! x_n \in ]0, +\infty[ ; x_n + \ln(x_n) = n$$

5

$x_1$  هو حل المعادلة :  $x + \ln x = 1$

$$\text{إذن : } x_1 = 1$$

و لدينا :  $f(x_n) = n$  إذن  $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن :  $f^{-1}$  دالة تزايدية قطعاً فإن :

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n$$

(1)

إذن من النتيجة  $x_{n+1} > x_n$  نستنتج أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية قطعاً.

نفترض أن المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مكبورة بعدد حقيقي  $A$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq A$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : f(x_n) \leq f(A) = B$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : n \leq B$$

$$\Leftrightarrow \text{المجموعة } \mathbb{N} \text{ مكبورة بالعدد } B$$

$$\Leftrightarrow \text{مستحيل}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ غير مكبورة (2)}$$

من (1) و (2) نستنتج أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متباعدة.

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

6

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n + \ln n \geq n$$

$$\Leftrightarrow f(n) \geq f(x_n)$$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(n) \geq f(x_n)$$

و بما أن  $f^{-1}$  دالة تزايدية فإن :  $f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(f(x_n))$

$$\text{و بالتالي : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$$



1 ■

لدينا دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على  $]0,1[$  .

ولدينا :  $\forall x \in ]0,1[ ; f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$

إذن دالة  $f_n$  تزايدية قطعاً على  $]0,1[$

ومنه  $f_n$  تقابل من  $]0,1[$  نحو  $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا :  $f_n(0) = -1 < 0$

و  $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$

إذن :  $0 \in ]f_n(0), f_n(1)[$

ومنه :  $0$  يمتلك سابقاً واحداً  $\alpha_n$  بالتقابل  $f_n$

يعني :  $\exists! \alpha_n \in ]0,1[ ; f_n(\alpha_n) = 0$

2 ■

لدينا :  $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وبما أن :  $x \in ]0,1[$  فإن :  $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

ومنه :  $\forall x \in ]0,1[ ; f_{n+1}(x) > f_n(x)$

ولدينا كذلك :  $\alpha_{n+1} \in ]0,1[$  إذن :  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

ونعلم أن :  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن :  $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

وبما أن  $f_n$  دالة تزايدية قطعاً على  $]0,1[$  فإن :  $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

إذن  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  متتالية تناقصية قطعاً.

ولدينا :  $0 < \alpha_n < 1 ; (\forall n \geq 2)$

يعني أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  مصغورة بالعدد 0

و بالتالي :  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  متتالية متقاربة .

3 ■

لدينا  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي  $t$  المخالف لـ 1 .

إذن :  $1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

3 ■

لدينا من أجل :  $t \neq 1$

$$1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \dots + t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

4 ■

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

ونعلم أن :  $f_n(\alpha_n) = 0$

$$-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$1 = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{إذن :}$$

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{ومنه :}$$

4 ■

ننتقل من الكتابة :  $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha_n} \geq \frac{1}{1 - t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1 - \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(1 - \alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right)$$

وبما أن :  $\alpha_n^{n+1} < 1$

$$\left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right) \leq \left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي :

$$(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{1}{n+1} \right)$$





$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \underbrace{\left( \frac{1}{1-\alpha_n} \right)}_{+\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{n+1} \right)}_{+\infty} \quad \text{لدينا :}$$

$\downarrow$   $\downarrow$

$0$   $0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \ln(1 - \alpha_n)) = 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad \text{نضع :}$$

$$1 + \ln(1 - \ell) = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - \ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - \ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ell} = e$$

$$\Leftrightarrow e(1 - \ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{e - 1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1 - e^{-1}$$

■ الحمد لله رب العالمين ■

