أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

I 1

<u>منهجية التفكير في هذا السؤال</u> :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ 1 < x*y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y > 1$ و $x*y < 2$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ \dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} > 0$ و $\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ \alpha+\beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

<u>إلى العمل</u> : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$.

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$.

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$.

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعا .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعا .

إذن : جداؤهما كمية موجبة قطعا . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2) > (x-1)(y-1)+(x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$$

نحصل على : $\dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y < 2}$ (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1)+2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)] > (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$$

نجد : $2 > \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

يعني : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ 2 > x*y}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ 1 < x*y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y \in G$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 أ

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} f : & (\mathbb{R}_+^*, \times) & \longmapsto & (G,*) \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}$$

لكي يكون التطبيق f تشاكلا يكفي أن نتحقق من أن :

$\forall \ x,y \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ f(x \times y) = f(x) * f(y)$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $f(x) * f(y) = \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) * \left(\dfrac{y+2}{y+1}\right)$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x \times y)$$

إذن : $\boxed{f(x) * f(y) = f(x \times y)}$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(G,*)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$(\forall y \epsilon G), (\exists! \, x \in \mathbb{R}_+^*) \ : \ f(x) = y$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقا تقابليا عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ y .

ليكن y عنصرا من المجموعة G و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = y$.

هذه المعادلة تصبح : $\dfrac{x+2}{x+1} = y$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

نجد : $(x+2) = y(x+1)$

يعني : $x+2 = xy+y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\dfrac{1}{1-y}$

نجد : $x = \dfrac{y-2}{1-y}$

نلاحظ أن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

أي وجود عدد آخر y' يحقق $x = \dfrac{y'-2}{1-y'}$

فإنه سوف نحصل على : $\dfrac{y-2}{1-y} = \dfrac{y'-2}{1-y'}$

أي : $y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$

أي : $(y-y')=0$ أي : $y=y'$

و بالتالي فإن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\dfrac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall y \in]1,2[\; ; \; \dfrac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(y-2)<0$

و لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(1-y)<0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميتان سالبتان قطعا.

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\forall y \in]1,2[\; ; \; \dfrac{y-2}{1-y} > 0$

إذن : $f(x)=y$: $(\forall y \in G) , \left(\exists ! \, x = \dfrac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^* \right)$

يعني أن f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

I - 2 - ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ عن طريق التطبيق f .

و من ثم :

- إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن $\top$ تبادلي أو تجميعي في F .
- إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر المحايد للقانون $\top$ في F .
- إذا كان x' هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ بالنسبة للقانون $\top$ في F

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f \; : \; (\mathbb{R}_+^*,\times) \longmapsto (G,*)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ عن طريق التطبيق f .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$

أي العدد $\frac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$\boxed{(\forall x \in G) \; ; \; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x}$$

II - 1 - أ

تذكير : لتكن $(E,*,\top)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E .

نقول بأن عنصرا x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists \, y \in E \setminus \{e\} \; ; \; x \top y = y \top x = e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ التي صفرها $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A \times A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^3 = \mathcal{O}}$

لدينا المصفوفة $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A \neq \mathcal{O}$

و لدينا : $A^3 = A \times A^2 = \mathcal{O}$

مع : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{O}$

إذن نستنتج أن $A \neq \mathcal{O}$ و توجد مصفوفة و هي A^2 تخالف $\mathcal{O}$

و تحقق $A \times A^2 = A^2 \times A = \mathcal{O}$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

II - 1 - ب

$$\begin{aligned} (A^2 - A + I) \times (A + I) &= A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I \\ &= A^3 + I = \mathcal{O} + I = I \end{aligned}$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة $(A^2 - A + I)$ عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A+I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$

و بالتالي $(A+I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $(A^2 - A + I)$.

و لدينا : $(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} (A^2 - A + I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 II

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y \\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x \\ (\alpha\times\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x) \\ 1\cdot x = x \end{cases} \;;\; \begin{pmatrix} \forall\, x,y\in E \\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{pmatrix}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$
و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .
في البداية نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتان من E .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= aI+bA-cI-dA \\ &= (a-c)I+(b-d)A \\ &= M(\,a-c\;;b-d\,)\in E \end{aligned}$$

إذن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $\boxed{(E,+) \text{ زمرة تبادلية}}$ **(1)**
نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$
و ذلك لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\,,\forall\alpha\in\mathbb{R}\;;\;\alpha\cdot M(a,b) = M(\alpha a,\alpha b)\in E$

إذن :
$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B \\ (\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A \\ (\alpha\times\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A) \\ 1\cdot A = A \end{cases} \;;\; \begin{pmatrix} \forall\, A,B\in E \\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{pmatrix} \quad \mathbf{(2)}$$

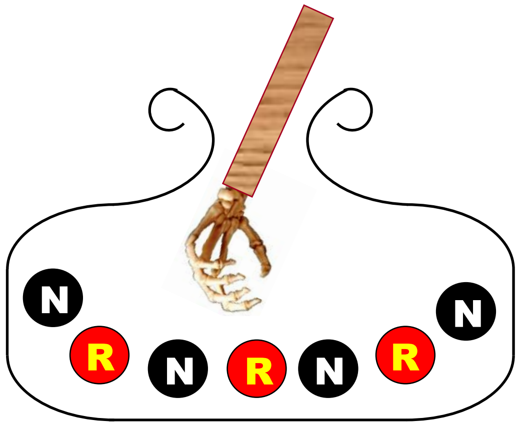
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
نعتبر الأسرة (I,A) .
من الواضح أن الأسرة (I,A) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.
لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\;;\; M(a,b) = aI+bA$
يعني أن كل مصفوفة من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين I و A
لنبين الآن أن الأسرة (I,A) حرة .
من أجل ذلك ننطلق من تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$a\cdot I + b\cdot A = O$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&0&0\\0&a&0\\0&0&a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&3b&2b\\0&0&b\\0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&3b&2b\\0&a&b\\0&0&a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

إذن الأسرة (I,A) حرة .
و بما أن (I,A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

التمرين الثاني

1 I



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل 7^4 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = 7^4 = 2401$
بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$P_X \;:\; \{0,1,2,3,4\} \longmapsto [0,1]$$
$$k \longmapsto P_X(k) = p[X=k]$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

لنحسب : $p[X=0]$
الحدث $[X=0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4 امكانية لسحب الكرات الأربع .
إذن : $\boxed{p[X=0] = \dfrac{3^4}{7^4} = \dfrac{81}{2401}}$

لنحسب : $p[X=1]$
الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :
4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء
C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء
3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء
إذن : $\boxed{p[X=1] = \dfrac{4^1\times C_4^1\times 3^3}{7^4} = \dfrac{432}{2401}}$

لنحسب : $p[X=2]$
الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين .
و من أجل ذلك لدينا :
4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .
C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .
3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .
إذن : $\boxed{p[X=2] = \dfrac{4^2\times C_4^2\times 3^2}{7^4} = \dfrac{864}{2401}}$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :

3^1 إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4^3 إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $\boxed{p[X=3]=\dfrac{3^1\times C_4^1\times 4^3}{7^4}=\dfrac{768}{2401}}$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $\boxed{p[X=4]=\dfrac{4^4}{7^4}=\dfrac{256}{2401}}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X\ :\ \{0,1,2,3,4\}\ \longmapsto\ [0,1]$$

$$\begin{array}{l} 0 \longmapsto P_X(0)=\dfrac{81}{2401} \\ 1 \longmapsto P_X(1)=\dfrac{432}{2401} \\ 2 \longmapsto P_X(2)=\dfrac{864}{2401} \\ 3 \longmapsto P_X(3)=\dfrac{768}{2401} \\ 4 \longmapsto P_X(4)=\dfrac{256}{2401} \end{array}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\boxed{\frac{81}{2401}+\frac{432}{2401}+\frac{864}{2401}+\frac{768}{2401}+\frac{256}{2401}=1}$$

2 I

$$E(X)=\sum_{0}^{4}k\cdot p[X=k]$$
$$=0\left(\frac{81}{2401}\right)+1\left(\frac{432}{2401}\right)+2\left(\frac{864}{2401}\right)+3\left(\frac{768}{2401}\right)+4\left(\frac{256}{2401}\right)$$
$$=\frac{5488}{2401}=\frac{16}{7}$$

1 II

لدينا : $p(E\cap N)=p_N(E)\times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحبات متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزيء الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى

E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية

E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E=E_1\cap E_2\cap E_3$

و منه : $p_N(E)=p_N(E_1)\times p_N(E_2)\times p_N(E_3)$

يعني : $p(E\cap N)=p_N(E)\times p(N)$
$$=p_N(E_1)\times p_N(E_2)\times p_N(E_3)\times p(N)$$
$$=\frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}\times\frac{4}{7}=\frac{2016}{9240}=\boxed{\frac{12}{55}}$$

2 II

$$p(E)=p(E\cap N)+p(E\cap R)$$
$$=\frac{12}{55}+p_R(E_1)\times p_R(E_2)\times p_R(E_3)\times p(R)$$
$$=\frac{12}{55}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{7}$$
$$=\frac{12}{55}+\frac{72}{9240}=\boxed{\frac{87}{385}}$$

3 II

لنحسب $p_E(R)$

$$p_E(R)=\frac{p(R\cap E)}{p(E)}=\frac{p_R(E)\times p(R)}{p(E)}$$
$$=\frac{p_R(E_1)\times p_R(E_2)\times p_R(E_3)\times p(R)}{p(E)}$$
$$=\frac{\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{7}}{\frac{87}{385}}=\boxed{\frac{1}{29}}$$

التمرين الثالث

1 I

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2\,z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$$

لدينا : $\Delta=4(a-1)^2-8(a-1)^2$
$$=-4(a-1)^2$$
$$=\big(2i(a-1)\big)^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1=\dfrac{2(a-1)+2i(a-1)}{4}=\dfrac{(a-1)(1+i)}{2} \\ z_2=\dfrac{2(a-1)-2i(a-1)}{4}=\dfrac{(a-1)(1-i)}{2} \end{array}}$$

أ 2 I

لدينا $a=e^{i\theta}$ مع $0<\theta<\pi$ إذن : $(a-1)=e^{i\theta}-1$

$$(a-1)=e^{i\theta}-1=\cos\theta+i\sin\theta-1$$
$$=\cos(\theta)-1+i\sin(\theta)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1)=r\,e^{i\varphi}$.

يعني : $\cos(\theta)-1+i\sin(\theta)=r\cos(\varphi)+i\,r\sin(\varphi)$

أي : $\begin{cases}\cos(\theta)-1=r\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)=r\sin(\varphi)\end{cases}$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta)-1)^2+sin^2\theta=r^2(cos^2\theta+sin^2\theta)$

يعني : $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta = r^2$

يعني : $2(1-\cos\theta) = r^2$

يعني : $2\left(1-\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right) = r^2$

يعني : $2\left(2-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = r^2$

يعني : $4\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = r^2$

يعني : $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = r^2$

يعني : $r = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $r > 0$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننطلق من الكتابة $\sin\theta = r\sin\varphi$

يعني : $\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\varphi)$

يعني : $2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$

يعني : $\frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني $\varphi \equiv \frac{\theta-\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن : $\boxed{(a-1) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}}$

I 2 ب

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

إذن :

$$z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

II 1

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

إذن : $\boxed{aff(J) = \frac{aff(A)+aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}}$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

إذن : $\boxed{aff(K) = \frac{aff(A)+aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}}$

II 2

لدينا r_1 دوران مركزه J و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

و لدينا $r_1(C) = C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(C') - aff(J)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(C) - aff(J)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(c' - \frac{a+i}{2}\right) = i\left(i - \frac{a+i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1-ia+a+i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A) = A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(A') - aff(K)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(A) - aff(K)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a' - \frac{a-i}{2}\right) = i\left(a - \frac{a-i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia-1+a-i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن : $\boxed{c' = z_2 \quad \text{و} \quad a' = z_1}$

II 3

لدينا :

$$\frac{a'-c'}{a-1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}} = \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2}\times\frac{1}{(a-1)} = \frac{i\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}} = i$$

إذن : $\frac{a'-c'}{a-1} = i$ و منه : $\arg\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.

أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B' \in (AB')$ و $(A'C') \perp (AB')$.

التمرين الرابع

1 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0^+)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 = f(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(+\infty)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+} x\,(\ln x)^2=0$$

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)$ نجد :

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-1-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(-x(\ln x)^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=(-0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}\left(1+\sqrt{1+(0)^2}\right)}\right)=(0)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=0}$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و $f'_d(0)=0$.

1 ج

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I .
و كانت f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J .
إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كان : $g(I)\subseteq J$

لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$

نضع : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

و نضع : $\forall\, x\in]0;+\infty[\ ;\ \psi(x)=x\ln x$

إذن : $\forall\, x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\varphi\circ\psi\,(x)$

لدينا ψ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$
و φ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
إذن تكون الدالة $\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$
إذا كان : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$
ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $\psi(x)=x\ln x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right[\subset\mathbb{R}$

إذن : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

إذن الدالة $f=\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.
ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$. لدينا :

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}=\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-1}{2}}}$$

إذن :
$$f'(x)=\frac{-1}{2}\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-1}{2}-1}\left(1+(x\ln x)^2\right)'$$
$$=\frac{-1}{2}\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(x\ln x)'$$
$$=\frac{-1}{2}\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(1+\ln x)$$
$$=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :
$$\boxed{(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

1 د

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x>0)\ ;\ \left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}>0$
إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.
الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1+\ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.
نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↘	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	↗	1	↘	0

2 أ

لدينا :
$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx$$
$$=\ln(|\ln x|)+c\quad ;\quad c\in\mathbb{R}$$

بما أن : $x\in[e;+\infty[$ فإن : $\ln x\geq1$
نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x\to\ln(\ln x)$ دالة أصلية
للدالة $x\to\frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e;+\infty[$.
و أشير إلى أن $x\to\ln(\ln x)$ دالة معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$
إذن فهي متصلة على $[e,+\infty[$ لأن : $[e,+\infty[\ \subset\ ]1,+\infty[$.

2 ب

ليكن t عنصرا من المجال $]e,+\infty[$.

نتطلق من المتفاوتة $0 < 1$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(t\ln t)^2 < 1 + (t\ln t)^2$

و منه : $\sqrt{(t\ln t)^2} < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} \quad (1)$

و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t\ln t \geq e > 1$

نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t > 1$

التي تصبح : $(\forall t \geq e)\ ;\ (t\ln t)^2 > 1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(\forall t \geq e)\ ;\ 2\,(t\ln t)^2 > 1 + (t\ln t)^2$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ \sqrt{2}\,t\ln t > \sqrt{1+(t\ln t)^2} \quad (2)$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}\,t\ln t}$$

2 ج

من خلال آخر تأطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t\ln t}\right) < \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} < \frac{1}{t\ln t}$$

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x \geq e$.

نُدخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التأطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_e^x \left(\frac{1}{t\ln t}\right) dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \int_e^x \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\ln t)]_e^x < \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < [\ln(\ln t)]_e^x$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$

2 د

لدينا حسب آخر تأطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$$

إذن : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \displaystyle\int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)}_{x\to+\infty \ \searrow\ +\infty} < \int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\ln(\ln x)}_{x\to+\infty \ \searrow\ +\infty}}$$

و هذا يعني حسب خاصية التأطير و النهايات أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_e^x f(t)\,dt = +\infty}$$

إذن :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt + \int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\binom{constante}{réelle} + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= (+\infty) + (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

إذن : $(1)\ \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا x نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)\times\frac{\ln x}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\times\frac{\ln x}{x} \\
&= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ y=\ln x}} \frac{\ln y}{y}\times\frac{\ln x}{x} = 0\times 0 = 0
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(\ln x)}{x}\right) = 0}$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)}_{x\to+\infty \ \searrow\ \mathbf{0}} < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{x\to+\infty \ \searrow\ \mathbf{0}}}$$

و منه حسب خاصية النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt = 0}$$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)}_{0}\\ &= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\begin{matrix}constante\\ réelle\end{matrix}\right)+0=0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall\, x\in[0,+\infty[\ ;\ F'(x)=f(x)$

و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall\, x\in]0,+\infty[)\ ;F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

عندما تنعدم الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x=1$ أو $x=\frac{1}{e}$

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .

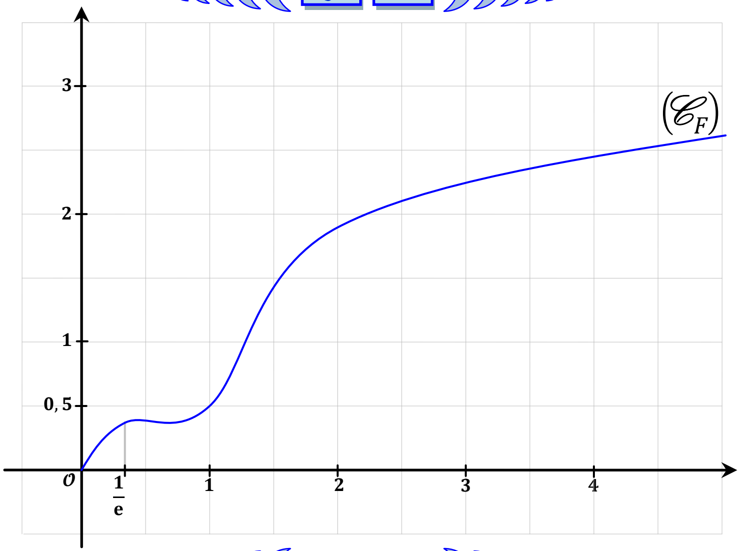
و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$

و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$.

لأن : $\forall\, x\in]0,+\infty[\ ;\ F''(x)=f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(\mathscr{C}_F)$		$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ محدب	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	

2 ز



3 أ

نستعمل النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-F(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{F(x)}{x}\right)\\ &=(+\infty)(1-0)=+\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=x-F(x)$

و لدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ بحيث : $F'(x)=f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=1$

يعني : $1-f(x)$ أي : $\varphi'(x)=0$

إذا كان $0\le x\le\frac{1}{e}$ فإن $f(0)\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

إذن : $1\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1-f(x)\ge0$ أي : $\varphi'(x)\ge0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

إذا كان $\frac{1}{e}\le x\le1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le f(1)$

لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le1$ يعني : $1-f(x)\ge0$ أي : $\varphi'(x)\ge0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

إذا كان : $x\ge1$ فإن : $f(x)\le f(1)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$.

إذن : $f(x)\le1$ يعني : $1-f(x)\ge0$ أي : $\varphi'(x)\ge0$.

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

خلاصة : $\boxed{\varphi \text{ دالة تزايدية قطعا على المجال } [0,+\infty[}$

3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو صورته $\varphi(\,[0,+\infty[\,)$.

و لدينا : $\varphi(\,[0,+\infty[\,) = \left[\varphi(0)\,;\, \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [0,+\infty[$

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$.

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall\, y \in [0,+\infty[\,)\,,(\,\exists!\, x \in [0,+\infty[\,)\ ;\ \varphi(x) = y$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0,+\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ α_n في المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا

و هو α_n في المجال $[0,+\infty[$ و ذلك كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

أو بتعبير أخير : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,(\,\exists!\ \alpha_n \ge 0\,)\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \ge 0$

إذن $F(\alpha_n) \ge F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

يعني أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ F(\alpha_n) \ge 0$ (1)

و نعلم أن : $(\forall x \ge 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \ge 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \ge 0$

يعني : $\alpha_n \ge \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \ge n$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \ge \underbrace{n}_{\substack{n\infty \\ \to +\infty}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$

4 أ

ليكن $n \ge 1$ و $n\in\mathbb{N}$.

لدينا الدالة F متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ ;\ F'(x) = f(x)$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في أي مجال محدود يوجد ضمن $[0,+\infty[$.

في المرحلة الأولى : نختار المجال $[0;\alpha_n]$.

لدينا $[0;\alpha_n] \subset [0,+\infty[$ لأن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \ge 0$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر c من المجال $]0;\alpha_n[$ بحيث :

$$\frac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$$

يعني : $0 < c < \alpha_n$ و $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا : $0 < c < \alpha_n$ إذن : $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

و منه : $1 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$ (∗)

بما أن $\alpha_n \ge n \ge 1$ فإن $n \in [1;+\infty[$ و $\alpha_n \in [1;+\infty[$

لدينا $\alpha_n \ge n$ إذن $f(\alpha_n) \le f(n)$ لأن f تناقصية على $[1;+\infty[$

إذن بالرجوع إلى التأطير (∗) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني : $0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)$ (1)

في المرحلة الثانية نُطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في $[0;n]$

إذن يوجد عنصر ε من $]0;n[$ بحيث :

$$\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

يعني : $0 < \varepsilon < n$ و $\dfrac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا : $0 < \varepsilon < n$ إذن : $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني : $1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $0 < 1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني : $0 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $-f(n) < \dfrac{-F(n)}{n} < 0$ (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$ (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن : $0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}$ (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n \ge 1)\ ;\ 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) \quad (\star)$$

4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{F(n)}{n} + f(n)\right) = 0$

و منه فإن التأطير (⋆) يُصبح :

$$(\forall n \ge 1)\ ;\ \underbrace{0}_{\substack{n\infty \\ \to 0}} < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \underbrace{\frac{F(n)}{n} + f(n)}_{\substack{n\infty \\ \to 0}}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\blacksquare)\quad \lim_{n\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا $\alpha_n \geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \dfrac{n}{\alpha_n}$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim\limits_{n\infty}\left(1 - \dfrac{n}{\alpha_n}\right)$

يعني : $0 = 1 - \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$ يعني : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

أي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1$

التمرين الخامس

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \geq 1$

لدينا :

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right)$$
$$= n^2 \ln\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= n^2\left[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))\right]$$

2

نعتبر f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة f متصلة على $]0;+\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

لأن ln دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $arctan$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $]0;+\infty[\subset \mathbb{R}$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f في أي مجال محدود و يوجد ضمن $]0;+\infty[$

ليكن $n \geq 1$ و نختار المجال $[n\ ;\ n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]n\ ; n+1[$ بحيث :

$$(**)\quad \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

لدينا : $\forall\, x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(arctan(x))'}{arctan(x)} = \frac{\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)\, arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية $(**)$ نجد :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n+1)) - \ln(arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال 1) نجد : $v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\, arctan(c)}$

خلاصة :

$$(\forall n \geq 1)\,,(\exists\, c \in]n;n+1[)\ ;\ v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\, arctan(c)}$$

3

لدينا : $n < c < n+1$

نُدخل الدالة $arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

$$\textbf{(1)}\quad arctan(n) < arctan(c) < arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك : $n < c < n+1$

إذن : $(1+n^2) < (1+c^2) < 1 + (n+1)^2 \quad \textbf{(2)}$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$(1+n^2)arctan(n) < (1+c^2)arctan(c) < (1+(n+1)^2)arctan(n+1)$$

نُدخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\frac{1}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)arctan(n)}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} < \frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)} < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال 2) نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$

$(\otimes)$

4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}} \quad و \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}}$$

لدينا :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)} = \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+2n+2}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right) = (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} = \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right) = (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير $(\otimes)$ يُصبح :

$$\underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \frac{-2}{\pi}} < v_n < \underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \frac{-2}{\pi}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $\boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-2}{\pi}}$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n\infty} v_n\right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}}$

و الحمد لله رب العالمين