استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I=]0,1[$ نضع : $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

1. أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن
   ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن
   ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. — 0,50 ن
2. بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. — 0,50 ن
3. نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H}=\{\,2^n\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\,\}$ و $\mathbb{K}=\left\{\dfrac{1}{2^n+1}\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\right\}$
   أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$. — 0,50 ن
   ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : $\varphi:\ \mathbb{H}\longrightarrow I$ ، $x\longrightarrow\dfrac{1}{x+1}$ — 0,50 ن
   بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H},\times)$ إلى $(I,*)$
   ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x\equiv 2[19]$.

1. أ) تحقق أن : $10^{x+1}\equiv 1[19]$. — 0,25 ن
   ب) بين أن : $10^{18}\equiv 1[19]$. — 0,50 ن
2. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.
   أ) بين أن : $10^d\equiv 1[19]$. — 0,75 ن
   ب) بين أن : $d\equiv 18$. — 0,50 ن
   ج) استنتج أن : $x\equiv 17[18]$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

1. بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن
2. حدد العددين العقديين α و β بحيث : — 0,50 ن

$$(\forall z\epsilon\mathbb{C}):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

3. أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5-12i)$. — 0,50 ن
   ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C. — 0,50 ن

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

(أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$ — 0,50 ن

(ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z . — 0,50 ن

(ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة **ثابتة** . — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x+\ln x}$.

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm})$

① أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ — 1,00 ن

② (أ) ضع جدول تغيرات الدالة f . — 0,50 ن

(ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} . — 0,75 ن

③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشىء $(\mathcal{C})$ و $(\overset{-1}{\mathcal{C}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$. — 0,50 ن

④ (أ) أحسب التكامل : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)dx$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$) — 0,50 ن

(ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\overset{-1}{\mathcal{C}})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$. — 0,50 ن

⑤ نعتبر المعادلة : $x+\ln x=n\quad:\quad(E_n)$.

(أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n . — 0,25 ن

(ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ — 0,50 ن

⑥ (أ) بين أن $f(x_n)\le f(n)\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج أن $x_n\le n\ :\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$. — 0,50 ن

(ب) بين أن $n-\ln n\le x_n\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$. — 0,50 ن

(ج) أحسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$ — 0,50 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن — ① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن — ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)

0,50 ن — ③ أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$

0,50 ن — ب) استنتج أن : $\alpha_n + \dfrac{(\alpha_n)^2}{2} + \dfrac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \dfrac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن — ④ أ) بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن — ب) بين أن : $(\forall n \geq 2) \; : \quad 0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0,50 ن — ج) استنتج أن : $\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$