التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

I لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

I 1 (0,50 ن) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية

و نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G بما يلي : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

I 2 أ (0,75 ن) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

I 2 ب (0,50 ن) استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .

II نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II 1 أ (0,50 ن) تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

II 1 ب (0,50 ن) تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$.

ثم استنتج أن المصفوفة $(A+I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده .

II 2 (0,75 ن) لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b) = a\cdot I + b\cdot A$.

و نعتبر المجموعة : $E = \{\ M(a,b)\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

I 1 (1,00 ن) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

I 2 (0,50 ن) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

II ننجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

$N = \{$ الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء $\}$.

$R = \{$ الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء $\}$.

$E = \{$ جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء $\}$.

0,50 ن — II 1 — بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$

0,50 ن — II 2 — أحسب $p(E)$

0,50 ن — II 3 — أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق .

التمرين الثالث : (3,5ن)

I — ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

0,50 ن — I 1 — بين أن : $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلي المعادلة (E) .

I 2 — نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$.

0,50 ن — I 2 أ — بين أن : $a - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$

1,00 ن — I 2 ب — استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 .

II — المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نفترض أن $\Re(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

0,50 ن — II 1 — حدد لحقي كل من J و K منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a .

0,50 ن — II 2 — ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

0,50 ن — II 3 — أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع : (8,25 ن)

1 — لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ن — 1 أ — بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن — 1 ب — أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$)

0,50 ن — 1 ج — بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ :

$$(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

0,50 ن — 1 د — ضع جدول تغيرات الدالة f .

2 لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

و ليكن $(\mathscr{C}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2 أ حدد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$. — 0,25 ن

2 ب بين أن : $t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}\,t\ln t$; $(\forall t \geq e)$ — 0,50 ن

2 ج بين أن : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt < \ln(\ln x)$; $(\forall t \geq e)$ — 0,75 ن

2 د استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ — 0,50 ن

2 هـ بين أن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما . — 0,50 ن

2 ز أنشئ $(\mathscr{C}_F)$ (نأخذ من أجل ذلك $F(1)\approx 0{,}5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}4$) — 1,00 ن

3 لكل x من المجال $[0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x) = x - F(x)$.

3 أ بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ . — 0,75 ن

3 ب بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0,+\infty[$. — 0,50 ن

3 ج بين أن : $\alpha_n \geq n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim_{n\infty}\alpha_n$ — 0,50 ن

4 أ بين أن : $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$; $(\forall n \geq 1)$ — 0,50 ن

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

4 ب أحسب النهاية : $\lim_{n\infty}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$ — 0,50 ن

التمرين الخامس : (1,75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n = \ln(u_n)$

1 تحقق أن : $v_n = n^2[\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$; $(\forall n \geq 1)$ — 0,25 ن

2 باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : — 0,50 ن

$$(\forall n \geq 1),(\exists\, c\,\epsilon\,]\,n\,;n+1\,[\,)\ ;\ v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$$

3 بين أن : $\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(1+n)^2)arctan(n+1)}$; $(\forall n \geq 1)$ — 0,50 ن

4 أحسب النهاية : $\lim_{n\infty} u_n$ — 0,50 ن