بسم الله الرحمان الرحيم

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2014

من انجاز: الاستاذ ايت بناكم محمد

التمرين الاول

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $a_n = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ مرة}}1$

1 - لنتحقق أن a_1 و a_2 اوليان:

$a_2 = 331$ $\qquad$ $a_1 = 31$

31 عدد اولي.

ولدينا: $E(\sqrt{331}) = 18$ و الاعداد الاولية المحصورة بين 1 و 18 هي: 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 و لا أحد من هذه الاعداد تقسم 331 إذن 331 عدد أولي.

2 - لنبين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $3a_n+7=10^{n+1}$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

$$a_n = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ مرة}}1$$
$$= 1 + 3\cdot10 + 3\cdot10^2 + \cdots + 3\cdot10^n$$
$$= 1 + 3\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} 10^k\right)$$

نضع $\forall k\in\mathbb{N} : t_k = 10^k$

$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها 10

$$\sum_{k=1}^{n} 10^k = \sum_{k=1}^{n} t_k = t_1 \cdot \frac{1-10^n}{1-10}$$

اذن $a_n = 1 + \frac{10^n-1}{10-1} \times 3\cdot10$.

$$3a_n = 3 + 10^{n+1} - 10.$$

أي أن: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3 - لنبين أن $10^{30k+2} \equiv 7[31]$ $\forall k \in \mathbb{N}$

31 عدد أولي و $10 \wedge 31 = 1$ إذن حسب مبرهنة

Fermat: $10^{30} \equiv 1[31]$.

و بالتالي $(10^{30})^k \equiv 1[31]$ $\forall k \in \mathbb{N}$

ومنه $10^{30k} \cdot 10^2 \equiv 10^2 [31]$

و بما أن $10^2 = 3 \times 31 + 7$. فإن $10^2 \equiv 7[31]$

وعليه: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$ $\forall k \in \mathbb{N}$

4 - لنبين أن: $3 \cdot a_{30k+1} \equiv 0[31]$ $\forall k \in \mathbb{N}$

و لنستنتج أن: $31 / a_{30k+1}$

ليكن $k \in \mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال 2)

$3 \cdot a_{30k+1} = 10^{30k+2} - 7$ (من أجل $n = 30k+1$)

وحسب السؤال 3) لدينا $10^{30k+2} \equiv 7[31]$

يعني أن $31 / 10^{30k+2} - 7$

أي $31 / 3a_{30k+1}$ وأخيرا: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$

و بما أن $31 \wedge 3 = 1$ فإنه حسب مبرهنة

Gauss لدينا $31 / a_{30k+1}$

5- لنبين أنه إذا كان $n \equiv 1[30]$ فإن المعادلة

$a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا.

-2-

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نفترض أن $n \equiv 1\ [30]$

أي: $\exists k \in \mathbb{N} / \ n = 1 + 30k$.

وبالتالي 4) حسب السؤال $31 | a_n$

إذن $a_n \wedge 31 = 31$ وحيث أن $31 \nmid 1$

فإن المعادلة $a_n x + 31 y = 1$ $\not$ تقبل أي حل في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني

حيث $E = \{ M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$ ، $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

1- لنبين أن E زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

- $M(0,0) = O_2 \in E$ إذن $E \neq \emptyset$
- لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ لدينا $M(a,b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- ليكن M, N من E لنبين أن $M + (-N) \in E$

$M \in E \Rightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \ M = M(a,b)$

$N \in E \Rightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ N = M(x,y)$

$$M+(-N) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & x-y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-x & (a-x)-(b-y) \\ b-y & b-y \end{pmatrix}$$

نضع $\begin{cases} \alpha = a-x \\ \beta = b-y \end{cases}$

بما أن a, b, x, y من $\mathbb{R}$ فإن $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

ومنه: $M+(-N) = M(\alpha,\beta) \in E$

وعليه: $\forall M,N \in E \quad M+(-N) \in E$

إذن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

2-

$$J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$J^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$J^2=\begin{pmatrix}1+0&1+1\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

لدينا $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=M(1,0)$ إذن $J\in E$

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$; $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=M(a,b) \iff \begin{cases}a=1\\b=0\\a-b=2\\a+b=1\end{cases}$

$\iff \begin{cases}a=1\\b=0\\1=2\\1=1\end{cases}$

غير ممكن

ومنه هذا نستنتج أن $J^2\notin E$

إذن: $\exists (A,B)=(J,J)\in E^2 \,/\, A\times B\notin E$

وعليه E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

3- $N=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$$A*B = A\times N\times B.$$

4- أ-

$$\varphi:\ \mathbb{C}^* \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$z=a+ib \longmapsto M(a,b)$$

لنبين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لكل z و z' من $\mathbb{C}^*$ حيث $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ مع $(a',b'),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$

لدينا $\varphi(zz')=\varphi(aa'-bb'+i(a'b+ab'))$

إذن:

$$\varphi(z\times z') = M(aa'-bb', a'b+ab')$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\varphi(z) * \varphi(z') = M(a,b) * M(a',b')$$
$$= \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & -a+a-b \\ b & -b+a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa'-bb' & a(a'-b')-b(a'+b') \\ ba'+ab' & b(a'-b')+a(a'+b') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa'-bb' & (aa'-bb')-(a'b+ab') \\ a'b+ab' & (aa'-bb')+(ba'+ab') \end{pmatrix}$$
$$= M(aa'-bb', a'b+ab') = \varphi(z z').$$

وبالتالي:
$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^* \quad \varphi(z\times z') = \varphi(z) * \varphi(z')$$

ومنه φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}), *)$

ب- $E^* = E - \{O\}$ ؛ $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

ليكن $z = a+ib \in \mathbb{C}$ ؛ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow (a,b) \neq (0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow M(a,b) \in E.$$
$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \varphi(z) \in E.$$

ولدينا:
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad M(a,b) \in E - \{O\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (a,b) \neq (0,0)$$

$(a,b)=(0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ لأن .

ج - φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}), *)$

و بما أن $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times)$ هي كذلك زمرة تبادلية

و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

فإن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية .

4 - لنبين أن

$A*(B+C) = A*B + A*C$. $\forall A,B,C \in E^3$

ليكن A و B و C من E

$$A*(B+C) = A \times N \times (B+C)$$
$$= (A \times N \times B) + (A \times N \times C)$$

لأن $\times$ توزيعي على $+$ في $M_2(\mathbb{R})$.

$A*(B+C) = A*B + A*N$ و منه المطلوب .

5 - لنستنتج أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي .

لدينا حسب السؤال 1 - E زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(M_2(\mathbb{R}), +)$

إذن $(E, +)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد O .

وحسب السؤال 3-ج $(E \setminus \{O\}, \times)$ زمرة تبادلية

كما أن $A*(B+C) = A*B + A*C$ $\forall A,B,C \in E^3$

و $*$ تبادلي إذن $(B+C)*A = B*A + C*A$

إذن $*$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ على E .

وعليه فإن $(E, +, *)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}.$$

$$(E) : \quad z^2 - \sqrt{2}\, e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$$

1 - أ- لنتحقق أن مميز (E) هو $\Delta = \left(\sqrt{2}\, i\, e^{i\theta}\right)^2$

$$\Delta = \left(-\sqrt{2}\, e^{i\theta}\right)^2 - 4 e^{2i\theta}.$$

$$= 2 e^{2i\theta} - 4 e^{2i\theta}.$$

$$= -2 e^{2i\theta}$$

$$= \left(\sqrt{2}\, i\, e^{i\theta}\right)^2$$

ب- $\Delta = \sqrt{2}\, i\, e^{i\theta}.$ بما أن $\Delta \neq 0.$

ومنه المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\theta} - i\sqrt{2}\, e^{i\theta}}{2} \qquad z_2 = \frac{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)}{2} e^{i\theta}.$$

$$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right) e^{i\theta}. \qquad z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) e^{i\theta}$$

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\theta}. \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad e^{i\theta}$$

بما أن $z_1 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) ; z_2 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

2 - أ- لنبين أن $(OA) \perp (T_1T_2)$

$$\frac{z_{T_2} - z_{T_1}}{z_A - z_O} = \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}\, e^{i\theta}.}$$

$$= \frac{\cancel{e^{i\theta}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}{\sqrt{2}\, \cancel{e^{i\theta}}}$$

$$= \frac{2i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} = -i$$

بما أن $\frac{z_{T_2} - z_{T_1}}{z_A - z_O} \in i\mathbb{R}$ وعليه فإن: $(OA) \perp (T_1T_2)$

ب - K منتصف $[T_1T_2]$ لنبين أن O , K , A مستقيمية.

$$z_K = \frac{z_{T_1} + z_{T_2}}{2}$$

$$z_K = \frac{e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}}{2}$$

$$z_K = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= e^{i\theta}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}.$$

$$\frac{z_K - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}}{\sqrt{2}\,e^{i\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

إذن O , K , A نقط مستقيمية.

ج- لنستنتج أن (OA) واسط القطعة $[T_1T_2]$

لدينا: $(OA) \perp [T_1T_2]$

و K منتصف القطعة $[T_1T_2]$ ينتمي الى (OA)

إذن (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- لنحدد الصيغة العقدية ل r:

لكل $M(z)$ و $M'(z')$ من المستوى العقدي:

$$r(M) = M' \iff (z' - z_{T_1}) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_{T_1})$$

$$\iff z' = i\left(z - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}\right) + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$\iff z' = iz + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}(1-i).$$

$$\iff z' = iz + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$\iff z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

ب - لنبين أن $B = r(I)$ $\quad z_B = b = \sqrt{2}\, e^{i\theta} + i$

لدينا $r(I) = B \iff b = i z_I + \sqrt{2}\, e^{i\theta}$

$$\iff b = i \times 1 + \sqrt{2}\, e^{i\theta}$$

$$\iff b = i + \sqrt{2}\, e^{i\theta}$$

ج- لنبين أن : $(AB) \perp (IJ)$

$$\frac{z_J - z_I}{z_B - z_A} = \frac{-1-1}{\sqrt{2}\, e^{i\theta} + i - \sqrt{2}\, e^{i\theta}} = 2i$$

وإذن $\overline{(\vec{AB}, \vec{IJ})} \equiv \arg\left(\frac{z_J - z_I}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

$$\equiv \arg(2i) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

وعليه : $(AB) \perp (IJ)$

4- لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $-\vec{v}$

$t(A) = C \iff \vec{AC} = -\vec{v}$

$$\iff aff(\vec{AC}) = aff(-\vec{v})$$

$$\iff z_C - \sqrt{2}\, e^{i\theta} = -i$$

$$\iff z_C = \sqrt{2}\, e^{i\theta} - i$$

5- لنبين أن A منتصف $[BC]$

$$\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\theta} + i + \sqrt{2}\, e^{i\theta} - i}{2}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\theta}$$

$$= z_A$$

وإذن A منتصف القطعة $[BC]$

التمرين الرابع

-I

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \ ; \ x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 - أ - لنبين أن f متصلة على $[0,+\infty[$:

الدالة $x \longrightarrow 1+x^2$ متصلة و لا تنعدم على $\mathbb{R}_+^*$

إذن $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^2}$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

ولدينا $x \longrightarrow x\ln x$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$ كمجموع

الدالتين $x \longrightarrow \ln x$ و $x \longrightarrow x$ المتصلتين على $\mathbb{R}_+^*$

إذن f متصلة على $]0,+\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x\ln x}{1+x^2}$.

وحيث أن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2 = 1 \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

وبالتالي f متصلة في 0 على اليمين

إذن f متصلة على $[0,+\infty[$.

ب - إشارة $f(x)$ على $[0,+\infty[$

لدينا $\dfrac{x}{1+x^2} > 0 \quad \forall x>0$

إذن إشارة $f(x)$ على $]0,+\infty[$ هي عكس إشارة $-\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	

2- أ- لنبين أن $\forall x>0 \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ (ق.م = قابلية الاشتقاق)

لكل x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{x}\times(-\ln x)}{\frac{x^2+1}{x}}$$

$$=\frac{\ln x}{x^2+1}=-f(x).$$

ب- لنبين أن الدالة f ق.م على $]0;+\infty[$

$x\longrightarrow\frac{1}{1+x^2}$ ق.م على $\mathbb{R}$ لأنها دالة جذرية معرفة على $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} x\longrightarrow\ln x \\ x\longrightarrow -x\end{cases}$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

إذن $x\longrightarrow -x\ln x$ ق.م على $]0;+\infty[$.

ومنه f ق.م على $\mathbb{R}_+^*$

ج- لنبين أن $f'(\alpha)=0 \quad \exists\alpha\in]0;1[$

f متصلة على $\mathbb{R}^+$ فهي إذن متصلة على $[0;1]$

f ق.م على $]0;+\infty[$ وخاصة على $]0;1[$

ولدينا $f(0)=0$ و $f(1)=0$

بما أن $f(0)=f(1)$ وبالتالي حسب مبرهنة رول:

$$\exists\alpha\in]0;1[\quad f'(\alpha)=0.$$

ب- لنستنتج أن $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

$-f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x>0$

إذن $\frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -f'(x)$

إذن : $\frac{-1}{\alpha^2} f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -f'(\alpha) = 0$

وبما أن $\frac{-1}{\alpha^2} \neq 0$ فإن $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

II- $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1- أ) لنبين أن $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \forall t\in[1,+\infty[$

لدينا: $0 < t^2 \leq 1+t^2 \quad \forall t \geq 1$

إذن $\frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

$t \geq 1 \Rightarrow 1+t^2 \leq t^2+t^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2}$

ومنه ; $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \forall t \geq 1$

ب- ليكن $x\in[1,+\infty[$ لدينا

$\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \forall t\in[1,x]$

وبما أن $\frac{\ln t}{t} \geq 0$: $\forall t\in[1,x]$

فإن: $\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t} \leq \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t} \leq \frac{\ln t}{t} \quad \forall t\in[1,x]$

أي $\forall t\in[1,n]\;;\; -\frac{\ln t}{t} \le f(t) \le -\frac{\ln t}{2t}$

وحيث أن الدالة $t \to -\frac{\ln t}{t}\;;\; t\to f(t)\;;\; t\to -\frac{\ln t}{2t}$ ، متصلة على $[1,n]$

فإن: $\int_1^n -\frac{\ln t}{t}\,dt \le \int_1^n f(t)\,dt \le \int_1^n -\frac{\ln t}{2t}\,dt$

$$\int_1^n \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\ln t \times \ln'(t)\right]_1^n$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^n$$
$$= \frac{1}{2}\ln^2(n)$$

فإن $-\frac{1}{2}\ln^2 n \le \int_1^n f(t)\,dt \le -\frac{1}{4}\ln^2 n$

وبالتالي $\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2}\ln^2 n \le \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^n f(t)\,dt \le \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{\ln^2 n}{4}$

ومنه: $\forall n\geq 1\quad F(1)-\frac{1}{2}\ln^2 n \le F(n) \le F(1)-\frac{1}{4}(\ln n)^2$

ج- لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(n)}{n}$

لدينا: $\forall n\geq 1,\quad F(n) \le F(1)-\frac{1}{4}(\ln n)^2$

$\left(\lim\limits_{+\infty} \ln n = +\infty \text{ لأن}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F(1)-\frac{1}{4}(\ln n)^2 = -\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = -\infty$

$$\forall n\geq 1\quad \frac{F(1)}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2 \le \frac{F(n)}{n} \le \frac{F(1)}{n}-\frac{1}{4}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2$$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

نضع $t=\sqrt{n}$ لدينا $n\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{t\to+\infty} 2\,\frac{\ln t}{t} = 0$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$.

و بالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

ومنه : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل جوار $+\infty$.

أ-2 $\quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+$

لنبين أن F ق.ش على $[0,+\infty[$

بما أن f متصلة على $\mathbb{R}^+$ فإن $x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم في 0

إذن
$$\begin{cases} F \text{ ق.ش على } [0,+\infty[\\ \forall x\geq 0 \quad F'(x) = f(x). \end{cases}$$

ب - لدينا F ق.ش على $[0,+\infty[$

$$\forall x\in[0,+\infty[\qquad F'(x) = f(x)$$

وحسب السؤال -2-ب- لدينا

$$\forall x\in]0,1[\qquad f(x) > 0$$
$$\forall x\in]1,+\infty[\qquad f(x) < 0$$

إذن
$$\begin{cases} \forall x\in]0,1[& F'(x) > 0 \\ \forall x\in]1,+\infty[& F'(x) < 0 \end{cases}$$

F تزايدية قطعا على $[0,1]$

F تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$.

III - 1) أ- لنبين أن: $\forall t>0 \quad -t\ln t \leq \frac{1}{e}$

نضع $\varphi(t) = t\ln t$.

φ ق.ش على $]0,+\infty[$

$\forall t>0 \quad \varphi'(t) = \ln t + 1$.

$\varphi'(t) > 0 \iff \ln t + 1 > 0$

$\iff \ln t > -1$

$\iff t > e^{-1}$

$\varphi'(t) = 0 \iff t = e^{-1}$

t	0		$\frac{1}{e}$		
$\varphi'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	‖	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	

لدينا $-\frac{1}{e}$ هي القيمة الدنيا المطلقة لـ φ على $]0,+\infty[$

إذن $\forall t \in]0,+\infty[\quad \varphi(t) \geq -\frac{1}{e}$

أي $\forall t>0 : \quad -t\ln t \leq \frac{1}{e}$

ب- لنبين أن $\forall t \in [0,+\infty[\quad f(t) \leq \frac{1}{e}$

من أجل $t=0$: $f(0) = 0 \leq \frac{1}{e}$ عبارة صحيحة

ليكن $t \in]0,+\infty[$ $\quad f(t) = \frac{-t\ln t}{1+t^2}$

بما أن $-t\ln t \leq \frac{1}{e}$

إذا كان $t \in [1,+\infty[$ فإن $f(t) \leq 0$ إذن $f(t) \leq \frac{1}{e}$

إذا كان $t \in]0,1[$ فإن $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \\ 0 < -t\ln t \leq \frac{1}{e} \end{array}\right\}$

إذن $f(t) \leq \frac{1}{e}$.

وبالتالي. $f(t) \leq \frac{1}{e}$ $\forall t \in [0, +\infty[$

ج- لنستنتج أن: $F(x) < x$ $\forall x > 0$

ليكن $x \in]0, +\infty[$

لدينا $f(t) \leq \frac{1}{e}$ $\forall t \in [0, x]$

إذن $\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$

أي

$F(x) \leq \frac{x}{e}$

وبما أن $\begin{cases} x > 0 \\ e > 1 \end{cases}$ فإن $\frac{x}{e} < x$

ومنه: $F(x) < x$ $\forall x > 0$

-e $\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$

أ- لنبين أن $u_n \in]0, 1[$ $\forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 \in]0, 1[$ حسب المعطيات
إذن العبارة صحيحة من أجل $n = 0$
ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن $0 < u_n < 1$ ولنبين أن
$0 < u_{n+1} < 1$

لدينا $0 < u_n < 1$

و F تزايدية قطعا على $[0, 1]$

إذن $F(0) < F(u_n) < F(1)$

ولدينا حسب السؤال III - 1) ج $F(1) < 1$

إذن $0 < u_{n+1} < 1$.

ومنه حسب مبدأ الترجع

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$

ب - لدينا
$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]0,1[$

و نعلم أن : $\forall x \in]0;+\infty[\quad F(x) < x$

من أجل $x = U_n$

نجد $\forall n \in \mathbb{N} \quad F(U_n) < U_n$

وهذا يعني أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} < U_n$

و بالتالي (U_n) تناقصية قطعا

(U_n) تناقصية و محصورة بالعدد 0

إذن (U_n) متقاربة

ج - لنحدد نهاية U_n

$$\begin{cases} U_0 \in]0,1[\\ U_{n+1} = F(U_n) \ ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

الدالة F متصلة على $[0,1]$

لكل x من $[0,1]$ لدينا $F(0) \leq F(x) \leq F(1)$

لأن F تزايدية على $[0,1]$

$F(1) < 1$ و $F(0) = 0$

إذن : $\forall x \in [0,1] \quad F(x) \in [0,1]$

أي $F([0,1]) \subset [0,1]$

المتتالية (U_n) متقاربة.

إذن نهايتها l هي حل للمعادلة $F(x) = x$

لدينا $\forall x \in]0,1] \quad F(x) < x$

إذن $F(x) \neq x \quad \forall x \in]0,1]$

وحيث أن $F(0) = 0$ فإن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $F(x) = x$ على $[0,1]$ وبالتالي

$\lim U_n = 0$

التمرين الخامس

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1 - لنبين أن g متصلة على $[0,+\infty[$

لدينا $x \to -\frac{1}{x}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن $x \to e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

ولدينا أيضا $x \to \frac{1}{x^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن g متصلة على $]0,+\infty[$

نضع $X = \frac{-1}{x}$ عندما يؤول x إلى 0^+ ؛ X يؤول إلى $-\infty$

و $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$

إذن $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$

ومنه g متصلة على اليمين في 0

وعليه g متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

2 - أ - $L(x) = \int_0^x g(t)\,dt$

الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$

إذن $x \to \int_0^x g(t)\,dt$ هي الدالة الأصلية لـ g على $[0,+\infty[$ والتي تنعدم في 0

إذن L ق ش على $[0,+\infty[$ فهي إذن متصلة على $[0,+\infty[$.

ب - لنحسب $L(x)$ من أجل $x>0$

$$L(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

الدالة G المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي

$$\begin{cases} G(t) = e^{-\frac{1}{t}} & t>0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}^+$ (تحقق من ذلك)

$$L(x) = [G(t)]_0^x = e^{-\frac{1}{x}} - G(0) = e^{-\frac{1}{x}}$$

إذن $\quad L(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \forall x>0$

ج- لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} L(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{X\to -\infty} e^{X} \qquad \left(X = -\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0$$

GROUPE des INSTITUTS EXCEL
Portail des métiers de l'avenir

وبما أن L دالة متصلة على اليمين في 0

فإن $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} L(x) = L(0)$

وعليه $\quad \underline{L(0) = 0}$

3- $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$$

g متصلة على المجال $[0,1]$

إذن (S_n) متقاربة ولدينا $\quad \lim S_n = \int_0^1 g(t)\,dt$

وبالتالي: $\quad \lim S_n = L(1) - L(0) = \frac{1}{e}$