المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي

تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية

المادة : الرياضيات

الشعبة : علوم رياضية

GROUPE des INSTITUTS EXCEL
Portail des métiers de l'avenir

التمرين 1:

1 – أ

$$(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0}$$

$$\Delta = \boldsymbol{(5 + i\sqrt{3})^2 - 4(4 + 4i\sqrt{3})}$$
$$\boldsymbol{= 25 + 10i\sqrt{3} - 3 - 16 - 16i\sqrt{3}}$$
$$\boldsymbol{= 6 - 6i\sqrt{3} = 9 - 6i\sqrt{3} - 3 = (3 - i\sqrt{3})^2}$$

ب/

$$a = \frac{5 + i\sqrt{3} - 3 + i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$b = \frac{5 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{2} = 4$$

ج/ لدينا :

$$a(1 - i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = 1 + 3 = 4 = b$$

إذن $b = (1 - i\sqrt{3})$

2-أ/ الصيغة العقدية للدوران $R\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$: هي :

$$z' = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - a) + a = i(z - a) + a$$

بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$$b_1 = i(0 + a) + a = -ia + a = -i(1 + i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$$
$$= -i - \sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$$

ب/ الصيغة العقدية للتحاكي h هي :

$$z' = k(z - a) + a = \sqrt{3}(z - a) + a$$

لتكن$B'_1 = R(B_1)$ إذن

$$b'_1 = \sqrt{3}(b_1 - a) + a = \sqrt{3}(-ia) + a = a(1 - i\sqrt{3}) = b$$

إذن $B'_1 = B$ منه : $B = R(B_1)$

ج/لدينا :

$$\frac{b}{b-a} = \frac{b}{a - i\sqrt{3}a - a} = \frac{b}{-a\sqrt{3}i} = \frac{b/a}{-\sqrt{3}i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6}i}$$

بالتالي : $arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

د/

بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة :

منه $\frac{c-0}{c-a} \div \frac{b-0}{b-a} \epsilon \mathbb{R}$

منه $arg\left(\frac{c-0}{c-a} \div \frac{b-0}{b-a}\right) \equiv 0[\pi]$

منه $arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv 0[\pi]$

$$arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$$

التمرين 2:

$x^{1439} \equiv 1436[2015]$ /1

بما أن 1=749*2015-1051*1436 فحسب مبرهنة بيزو <Bézout>

فأن 1= 2015^ 1436

أ/ لدينا

إذن $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ $x^{1439} - 2015k = 1436$

لدينا d/x و $d/2015$ منه $d/x^{\wedge}1436$ و $d/2015k$

$d/x^{\wedge}1439 - 2015k$ بالتالي $d/1436$

ب/ نضع

$x \wedge 2015 = d$ $\quad d/x \quad$ d/2015 إذن حسب السؤال السبق $d/1436$

إذن $d/1436*1051$ و لدينا $d/2015$ إذن $d/2015*749$

إذن $d/1436*1051-2015*749$

منه $d/1$ و بما أن $d>0$ فإن $d=1$ بالتالي $x \wedge 2015 = 1$

3-أ/

لدينا $2015 = 5*13*31$ بما أن $x \wedge 2015$

فإن $x \wedge (5*13*31) = 1$ إذن $\begin{cases} x \wedge 5 = 1 \\ x \wedge 13 = 1 \\ x \wedge 31 = 1 \end{cases}$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن :

$\begin{cases} x^4 \equiv 1[5] \\ x^{12} \equiv 1[13] \\ x^{30} \equiv 1[31] \end{cases}$ منه $\begin{cases} (x^4)^{360} \\ (x^{12})^{120} \\ (x^{30})^{48} \end{cases}$

بالتالي $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}$

ب/ لدينا $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \frac{5}{x^{1404}} - 1 \\ \frac{13}{x^{1404}} - 1 \end{cases}$ منه $\frac{5 \vee 13}{x^{1404}}$

أي $\frac{65}{x^{1404}} - 1$ أي $x^{1404} \equiv 1[65]$

مرة أخرى لدينا $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[65] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \frac{65}{x^{1404}} - 1 \\ \frac{31}{x^{1404}} - 1 \end{cases}$

منه $\frac{65 \vee 31}{x^{1404}} - 1$ أي $\frac{2015}{x^{1404}} - 1$

أي $x^{1404} \equiv 1[2015]$

/4

لدينا $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ منه $x^{1440} \equiv 1436x[2015]$

لدينا $x^{1404} \equiv 1[2015]$

إذن $1436x \equiv 1[2015]$ منه $\exists \alpha \in \mathbb{Z} \ 1436x - 2015\alpha$

منه $1436x - 2015\alpha = 1436*1051 - 2015*749$

منه $1436(x-1051) = 2015(\alpha - 749)$

منه $2015/1436(x-1051)$ بما أن $2015 \wedge 1436 = 1$

فإن $\frac{2015}{x-1051}$ أي $x \equiv 1051[2015]$

التمرين 3 :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1); \ E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to E \quad ; \quad x \mapsto \varphi(x) = M(x-1)$$

1-أ/ لدينا :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x+y) = M(x+y+1)$$

و $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ \ \varphi(x)T\varphi(y) = M(x-1)TM(y-1)$

$$= M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)$$

إذن $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \varphi(x+y) = \varphi(x)T\varphi(y)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R};+)$ نحو (E,T)

ب/ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x+1) = M(x)$$

إذن $\forall M \in E \ \ \exists m \in \mathbb{R} \ / \varphi(m) = M$

أي أن φ شمول أي $\varphi(\mathbb{R}) = E$

إذن و بما أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية فإن (E,T)

زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو $\varphi(0) = M(-1)$

2-أ/ لدينا

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$M(x)*M(y)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1-y & y\\ -2y & 1+2y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy & y(1-x+x(1+2y)\\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}$$

$$M(x)*M(y)$$
$$=\begin{pmatrix}1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy\\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy\end{pmatrix}$$

$$M(x)*M(y)=\begin{pmatrix}1-x-y-xy & y+x+xy\\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-(x+y+xy) & y+x+xy\\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy)\end{pmatrix}$$

$$M(x)*M(y)=M(x+y+xy)$$

2-ب/ بما أن:

$$(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \Rightarrow x+y+xy\epsilon\mathbb{R}$$

$$\big(M(x),M(y)\big)\epsilon E^2 \;\Rightarrow M(x+y+xy)\epsilon E$$
$$\Rightarrow M(x)*M(y)\epsilon E$$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),X)$ و لدينا أيضا

$$\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2\ \mathrm{M(x)*M(y)=M(x+y+xy)}$$
$$=\mathrm{M(y+x+xy)=M(y)*M(x)}$$

أي أن القانون X تبادلي

2-ج/ لدينا :

$$\forall(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3$$

$$M(x)*M(y)TM(z)=M(x)*M(y+z+1)$$
$$=M(x+y+z+1+x(y+z+1))$$

$$M(x)*\big(M(y)*TM(z)\big)=M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

$$\big(M(x)*M(y)\big)T\big(M(x)TM(z)\big)$$
$$=M(x+y+xy)TM(x+z+xz)$$
$$=M(x+y+xy+x+z+xz+1)$$

$$\big(M(x)*M(y)\big)T\big(M(x)TM(z)\big)$$
$$=M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

$$M(x)*\big(M(y)TM(z)\big)=\big(M(x)*M(y)\big)T\big(M(x)TM(z)\big)$$

و لكون القانون X و T تبادليان فإن :

$$\big(M(y)TM(z)\big)*M(x)=\big(M(y)*M(x)\big)T\big(M(z)TM(x)\big)$$

إذنX توزيعي بالنسبة ل Tفي E

2-د/ لدينا :

$$\forall x\epsilon\mathbb{R}\ \ M(x)TM(-1)=M(-1)TM(x)=M(x-1+1)$$
$$=M(x)$$

إذن M(-1) هي العنصر المحايد في (E,T)

و لدينا :

$$M(0)=I$$

$$\forall x\epsilon\mathbb{R}\ \ M(x)*M(0)=M(0)*M(x)=M(x+0+0)$$
$$=M(x)$$

إذن I هي العنصر المحايد في (E ;X)

3-أ/ لدينا :

$$(\forall x\epsilon\mathbb{R}-\{-1\})M(x)*M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$$
$$=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)$$

$$=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$$

لدينا (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد M(-1) :

القانونXقانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن$E\sqsubset M_2(\mathbb{R})$

و $(M_2(\mathbb{R}),X)$ تجميعي

القانون X توزيعي بالنسبة T في E و له عنصر محايد هو : I =M(0)

إذن$(E;T;X)$ حلقة واحدية , و بما أن لكل $M(x)\epsilon E-\{M(-1)\}$

مماثلا بالنسبة للقانون X هو :

$M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن$(E,T,X\ )$ جسم تبادلي

تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية

المادة : الرياضيات

الشعبة : علوم رياضية

Portail des métiers de l'avenir

التمرين 4 :

الجزء الأول :

$$\begin{cases} f(x) = x(1+ln^2x); \ \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1/ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1+\ln^2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1+ln^2x) = +\infty$$

ما يعني أن © يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الاراتيب جوار $+\infty$

2-أ/ لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x + x\ln^2 x$$
$$= \lim_{x\to0^+} x + (\sqrt{x}\ln x)^2 = 0+0^2 = f(0)$$

إذن f متصلة يمين الصفر

2-ب/ لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1+ln^2x = +\infty$$

إذن $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق

يمين الصفر , لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له

نفس منحى المتجهة $\vec{j}$

2-ج/ لدينا :

$$\forall x>0 f'(x) = 1+ln^2x + x\left(2lnx * \frac{1}{x}\right)$$
$$= 1+ln^2x+2lnx = (lnx+1)^2$$

$$\forall x>0 \quad (lnx+1)^2 \geq 0$$

و $(lnx+1)^2 = 0 \Leftrightarrow lnx = -1 \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد إذن f تزايدية قطعا

على $]0;+\infty[$

3-أ/ لدينا لكل :

$$f''(x) = 2(lnx+1) * \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(lnx+1) : x\epsilon]0;+\infty[$$

$$lnx+1>0 \Leftrightarrow x>e^{-1} \quad ln+1=0 \ \Leftrightarrow x=e^{-1}$$

إذن $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل

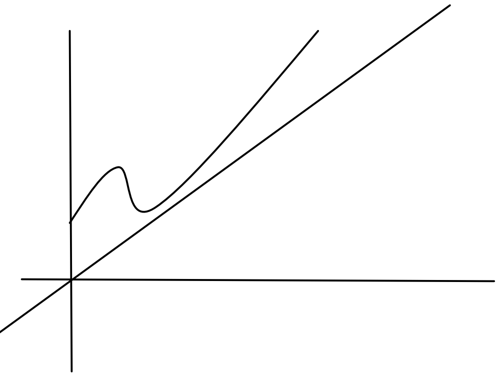
نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

3-ب/ لدينا لكل :

$$f(x)-x = xln^2x \geq 0 \quad x\ \epsilon]0;+\infty[$$

$$f(x)-x=0 \quad lnx=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$

إذن (C) يوجد فوق $(D): y=x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$



الجزء الثاني :

$$\begin{cases} U_0 = e^{-1} \\ U_{n+1} = f(U_n); \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

1/نعلم أن :

$e>1$ إذن $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$ أي $\frac{1}{e} \leq U_0 < 1$

نفترض إن $\frac{1}{e} \leq U_n < 1$ إذن $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(U_n) < f(1)$

لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$

ومنه $\frac{2}{e} \leq U_{n+1} < 1$ منه $\frac{1}{e} \leq U_{n+1} < 1$

إذن حسب مبدأ الترجع : $\frac{1}{e} \leq U_n < 1$ $\forall n\epsilon\mathbb{N}$

2/ لدينا:

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ U_{n+1}-U_n = U_n ln^2(U_n)$$

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}\ \ \frac{1}{e} \leq U_n < 1 \Rightarrow \ \forall n\epsilon\mathbb{N}\ \begin{cases}\ln(U_n) < 0\\ U_n > 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n\epsilon\mathbb{N}\quad U_n ln^2(U_n) > 0$$

إذن $(U_n)n$ متتالية تزايدية قطعا وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

3-أ/ لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \text{ و } \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \text{ و } \forall n\epsilon\mathbb{N}\ \frac{1}{e} \leq U_n < 1$$

$$\text{و } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \text{ إذن } \frac{1}{e} \leq l \leq 1$$

3-ب/ لدينا:

لدينا الدالة f متصلة على :

$$f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right) = \left[\frac{2}{e};1\right] \subset \left[\frac{1}{e};1\right] \text{ و } \left[\frac{1}{e}:1\right]$$

و المتتالية $(U_n)n$ متقاربة نهايتها l

إذن l تحقق لمعادلة f(x)=x والتي حسب الجزء الأول تقبل حلين 1 و 0

و لكون $\frac{1}{e} \leq l \leq 1$ فإن $l = 1$

الجزء الثالث :

$$\forall x\epsilon]0;+\infty[\ \ F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

1-أ/ لدينا لكل :

$$x\epsilon]0;+\infty[$$

$$H'(x) = \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 lnx\right)'$$
$$= \frac{-2}{4}x + \frac{1}{2}\left(2xlnx + x^2 * \frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{-1}{2}x + xlnx + \frac{1}{2}x = xlx = h(x)$$

إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h

1-ب/ لدينا لكل :

$$x\epsilon]0;+\infty[$$

$$\int_1^x tln^2(t)dt = \int_1^x \left(\frac{1}{2}t^2\right)' ln^2(t)dt$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2 ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t^2 2\ln(t) * \frac{1}{2}dt$$
$$= \frac{x^2}{2}ln^2(x) - \int_1^x tln(t)dt$$

1-ج/ لدينا لكل :

$$x\epsilon]0;+\infty[$$

$$F(x) = \int_1^x t\left(1+ln^2(t)\right)dt = \int_1^x t + tln^2(t)dt$$

$$= \int_1^x tdt + \int_1^x tln^2(t)dt$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + \frac{x^2}{2}ln^2(x) - \left[\frac{-1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2 lnt\right]_1^x$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}ln^2(x) - \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{2}lnx\right) - \left(\frac{-14}{4}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}ln^2(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}lnx - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}lnx + \frac{x^2}{2}ln^2(x)$$

2-أ/

نعلم أن الدالة f متصلة على [$0;+\infty$[إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة

و قابلة للاشتقاق [$0;+\infty$[و منه $\forall]0;+\infty[\ F(x) = k(x) - k(1)$

ما يعني أن الدالة F متصلة على [$0;+\infty$[

2-ب/

$$\lim_{x\to0^+} \mathrm{F(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{-3}{4} + \frac{3\mathrm{x}^2}{4} - \frac{\mathrm{x}^2}{2}\ln\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2}\ln^2(\mathrm{x})$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}lnx + \frac{(xlnx)^2}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{4}$$

بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن :

$$\int_0^1 \mathrm{f(t)dt} = \int_0^1 \mathrm{f(t)dt} = -\mathrm{F}(0) = -\lim_{\mathrm{x}\to0^+} \mathrm{F(x)} = \frac{3}{4}$$

التمرين الخامس :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-1}}{t}dt \ ; x > 0 \\ \mathrm{g}(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1 – أ – ليكن $x > 0$ لدينا

$$t\epsilon[x;2x] \Rightarrow x \le t \le 2x \ \Rightarrow -2x \le -t \le -x$$

$$\Rightarrow \ e^{-2x} \le e^{-1} \le e^{-x}$$

إذن $(\forall x > 0)(\forall t\epsilon[x;2x] \ \ e^{-2x} \le e^{-1} \le e^{-x}$

1-ب/ حسب السؤال السابق نستنتج أن :

$$(x > 0)(\forall t\epsilon[x;2x]) \ \frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-1}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t}$$

$$(\forall x > 0) \ \int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} \le \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt$$

منه $(\forall x > 0) \ e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \le g(x) \le e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$

أي $\forall x > 0 \ e^{-2x}[lnt]_x^{2x} \le g(x) \le e^{-x}[lnt]_x^{2x}$

منه $\forall x > 0 \ \ e^{-2x}(ln2x - lnx) \le g(x) \le e^{-x}(ln2x - lnx)$

بالتالي $\forall x > 0 \ \ \ e^{-2x}ln2 \le g(x) \le e^{-x}ln2$

1-ج/ بما أن

أن $\lim_{\mathrm{x}\to0^+} \mathrm{e^{-x}ln2} = \ln 2$ و $\lim_{\mathrm{x}\to0^+} \mathrm{e^{-2x}ln2} = \ln 2$

فإن $\lim_{x\to0^+} \mathrm{g(x)} = \ln 2 = \mathrm{g}(0)$ إذن g متصلة يمين 0

/2

بما أن الدالة $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال

لدينا لكل $x > 0$: $g(x) = G(2x) - G(x)$ و بما أن $x \mapsto 2x$ قابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و لدينا :

$$\forall x > 0 \ \ g'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2\frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

$$= \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$$

3 – أ ليكن $t > 0$ الدالة $P: x \mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0;t]$ قابلة للاشتقاق على $]0;t[$ لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists c_t\epsilon]0;t[\quad \frac{p(t) - p(0)}{t} = p'(c_t)$$

و لدينا $\forall x > 0 \ \ p'(x) = -e^{-x}$ منه $\exists c_t]0;t[\ \frac{e^{-t}-1}{t} = e^{-c_t}$

$$c_t\epsilon]0;t[\Rightarrow 0 < c_t < 1 \Rightarrow -t < -c_t < 0$$

$$\Rightarrow e^{-t} < e^{-c_t} < 1 \ \Rightarrow -1 < -e^{-c_t} - e^{-t}$$

منه $-1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}$

بالتالي $\forall t > 0 - 1 < \frac{e^{-t}-t}{t} < -e^{-t}$

أو أيضا $\forall t > 0 \ -1 \le \frac{e^{-t}-1}{t} \le -e^{-t}$

3-ب/ لدينا :

لدينا $\forall t > 0 \quad -1 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq -e^{-t}$

منه $\forall x > 0 \quad \int_x^{2x} -1dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt \ \leq \int_x^{2x} -e^{-t}dt$

منه $\forall x > 0 \ [-t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-1}}{t}dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \leq [e^{-t}]_x^{2x}$

منه $\forall x > 0 \quad -2x + x \leq g(x) - ln2 \leq e^{-2x} - e^{-x}$

بالتالي $\forall x > 0 - 1 \leq \frac{\mathrm{g(x)-ln2}}{\mathrm{x}} \leq \frac{\mathrm{e^{-2x}-e^{-x}}}{\mathrm{x}}$

3-ج/ بما أن :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{-2x}-1}{x} - \frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} -2\frac{e^{-2x}-1}{-2x} + \frac{e^{-x}-1}{-x} = -2*1+1 = -1$$

فإن $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-ln2}{x} = -1$ إي $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = -1$ و

ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر