المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2009	مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات (x,y) من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

0,25 ن ① أ) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 ن ب) بين أن $(\mathcal{F},\times)$ زمرة غير تبادلية .

1,00 ن ② لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من $\mathcal{F}$ حيث $x\epsilon\mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن ③ ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon E)\ ;\ (\forall(a,b)\epsilon E)\ :\ (x,y)\perp(a,b)=\left(ax\,,bx+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\varphi\ :\ (\mathcal{F},\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to\varphi\big(M(x,y)\big)=(x,y)$$

0,25 ن أ) أحسب : $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$.

0,50 ن ب) بين أن φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن ج) استنتج بنية $(E,\perp)$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1 .

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z . $(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$

0,25 ن ① أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\ [(1+i)(m-1)]^2$.

0,25 ن ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

0,50 ن	ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1
1,00 ن	2) نضع $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.
	(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .
	المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
	نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي : m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.
0,50 ن	1) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية.
0,50 ن	2) أ) بين أن التحويل $\mathcal{R}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.
0,50 ن	ب) بين أن العدد العقدي : $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\Re e(m) + \Im m(m) = 1$ ($\Re e(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\Im m(m)$ هو جزءه التخيلي)
0,50 ن	ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .
	التمرين الثالث : (3,0 ن) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.
0,25 ن	1) أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$.
0,50 ن	ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$.
	2) ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.
0,75 ن	أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$.
0,75 ن	ب) بين أن p يقسم a_{p-2} .
0,50 ن	ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$. ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q .)
	التمرين الرابع : (10 ن) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .
	نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي . $f_n(0) = 0$ و $(\forall x > 0)\ ;\ f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$
	(I) ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
0,50 ن	1) أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$).
0,25 ن	ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 .
1,00 ن	ج) حدد النهايات التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

② أ) أدرس تغيرات الدالة f_1 . — 0,50 ن

ب) أدرس تغيرات الدالة f_2 . — 0,50 ن

③ أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$. — 0,25 ن

ب) أنشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_2)$) نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ — 0,50 ن

(II) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

① أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$. وأن : $(\forall x < 0)\ ;\ F'(x) = \dfrac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$ — 0,50 ن

ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال : $]-\infty, 0]$ — 0,25 ن

② أ) بين أن : $(\forall x < 0)\ ;\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$ — 0,25 ن

ب) تحقق أن الدالة : $x \to x^2\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$. — 0,25 ن

ج) بين أن : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt = \frac{3}{4}$ — 0,25 ن

③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. — 0,25 ن

بين أن : $\dfrac{3}{8} \leq \ell \leq \dfrac{3}{4}$

(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$

① أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_n \geq 0$. — 0,50 ن

ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$. — 0,50 ن

ج) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} \leq u_n$. — 0,25 ن

د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة . — 0,25 ن

② أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{(n+1)}{2}u_n$ — 0,50 ن

ب) استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$. — 0,50 ن

③ أ) بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \dfrac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)}$ — 0,75 ن

ب) حدد : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n$ و $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} nu_n$ — 0,50 ن

④ a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $(\forall n \geq 1)\ ;\ v_{n+1} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{(n+1)}{2}v_n$

و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n = |v_n - u_n|$.

أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ d_n = \dfrac{n!}{2^{(n-1)}}d_1$ — 0,25 ن

ب) بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$ — 0,25 ن

ج) بين أن : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ — 0,25 ن

د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متباعدة. — 0,25 ن