



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول: (3,5 ن)

(I) في الحلقة الواحديّة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين A و I المعرفتين بما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① أحسب : $I - A$ و A^2 ن 0,75

② استنتج أن A تقبل مقلوبا يتم تحديده . ن 0,50

(II) لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $]1, +\infty[$ نضع : $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

① تحقق أن : $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ن 0,25

② بين أن : * قانون تركيب داخلي في I ن 0,50

③ نذكر أن : (\mathbb{R}_+^*, \times) زمرة تبادلية . ن 0,50

$$\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow I \\ x \longrightarrow \sqrt{x+1} \end{array}$$

نعتبر التطبيق :

① بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}_+^*, \times) إلى $(I, *)$. ن 0,50

② استنتج بنية $(I, *)$. ن 0,25

③ بين أن المجموعة : $\Gamma = \{\sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I, *)$ ن 0,75

التمرين الثاني: (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان.



المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$

(I) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : (E) حيث a عدد عقدي غير منعدم .

$$(E) : iZ^2 + (2 - i)aZ - (1 + i)a^2 = 0$$

① حدد Z_1 و Z_2 حلّي المعادلة (E) . ن 0,75

② ① تحقق أن : $Z_1 Z_2 = a^2(i - 1)$ ن 0,25



$$\arg a = \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

② ② بين أن : $Z_1 Z_2$ عدد حقيقي ن 0,50

(II) ليكن c عددا عقديا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم .

1 (أ) نعتبر النقط A و B و C و D و M التي أحاقها على التوالي هي : 1 و $(i+1)$ و c و ic و z .

1 (ب) بين أن : A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ ن 0,50

2 بين أن : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$ ن 0,50

ليكن h لحق النقطة H : المسقط العمودي للنقطة σ على (AD) .

1 (أ) بين أن : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$ ن 0,75

1 (ب) استنتج أن : $(CH) \perp (BH)$ ن 0,25

التمرين الثالث : (3,0 ن) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $143x - 195y = 52$: (E)

1 (أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 . و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .

1 (ب) علما أن : $(-1; -1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام لـ (E) في \mathbb{Z}^2 ن 0,75

2 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع العدد 5 بين أن : $n^{4k} \equiv 1[5] \forall k \in \mathbb{N}$ ن 0,50

3 ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث : $x \equiv y[4]$

1 (أ) بين أن : $n^x \equiv n^y[5] \forall n \in \mathbb{N}^*$ ن 0,50

1 (ب) استنتج أن : $n^x \equiv n^y[10] \forall n \in \mathbb{N}^*$ ن 0,50

4 ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون الزوج (x, y) حلا للمعادلة (E) .

بين أنه مهما يكن n من \mathbb{N}^* : العددين n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .



التمرين الرابع : (5,5 ن) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ليكن (\mathcal{E}_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ن 0,50

2 (أ) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (\mathcal{E}_n) بجوار $-\infty$. ن 0,50

1 (ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}_n) بجوار $+\infty$ ن 0,50

و حدد الوضع النسبي لـ (\mathcal{E}_n) و (D)



3 أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها . ن 0,75

4 أنشئ المنحنى (\mathcal{E}_3) نأخذ : $f_3(-1,5) \approx 0$ و $\ln 3 = 1,1$ و $f_3(-0,6) \approx 0$ ن 0,50

5 (أ) بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن : $\frac{e}{n} < \ln(n)$ ن 0,25

1 (ب) بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : ن 1,00

$$\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{و} \quad x_n \leq -\ln(n)$$

0,50 ن

ج) أحسب : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

ا) بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0

0,25 ن

ب) تحقق أن لكل $n \geq 3$ $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

0,50 ن

ج) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

0,25 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}, \forall x \in]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :1) ليكن x عنصرا من المجال $[0,1]$ بين أنه مهما يكن t من المجال $[0, x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

0,25 ن

2) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$ ا) بين أن $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

0,50 ن

ب) بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0

0,75 ن

3) باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء بين أن :

0,75 ن

$$\forall x \in]0,1] : \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$ ا) بين أن : $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0,50 ن

ب) بين أن : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2t)^2}$

0,75 ن

ج) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0, x]$ بين أن :

0,75 ن

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د) استنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0

0,25 ن