التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \;;\; x*y=x+y-2$

1 أ بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن

1 ب بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . — 0,25 ن

1 ج بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية . — 0,50 ن

2 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \;;\; x\top y=xy-2x-2y+6$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $(\forall x\epsilon\mathbb{Z}) \;;\; f(x)=x+2$

2 أ بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$. — 0,50 ن

2 ب بين أن : $\forall\,(x,y,z)\,\epsilon\,\mathbb{Z}^3 \;;\; (x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$ — 0,25 ن

3 إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية . — 0,75 ن

4 أ بين أن : $x\top y=2$ إذا وفقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$. — 0,25 ن

4 ب استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ كاملة . — 0,25 ن

4 ج هل $(\mathbb{Z},*,\top)$ جسم ؟ (علل الجواب) — 0,25 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E):2z^2-(3+i\sqrt{3})az+(1+i\sqrt{3})a^2=0$$

I 1 تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$. — 0,25 ن

I 2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b=ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

II 1 تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . — 0,50 ن

II 2 أ بين أن : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ — 0,50 ن

II 2 ب بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . — 0,50 ن

0,50 ن | II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \times \dfrac{a}{b}$

0,75 ن | II | 3 | ب | بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة .

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1

و التي تحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ التالية : $(\mathfrak{R}) :\ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.

1 | نفترض أن n يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

0,75 ن | 1 | أ | بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$.

0,50 ن | 1 | ب | بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$.

0,50 ن | 1 | ج | بين أنه يوجد زوج (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$.

0,50 ن | 1 | د | ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$.

(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \epsilon \mathbb{Z}$)

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$.

0,75 ن | 2 | إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$.

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x \ln x} \ ; \ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | أ | بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 .

0,75 ن | 1 | ب | بين أن : $(\forall x > 1) ; \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]1; +\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h .

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1) \ ; \ 0 < h(x) \leq 1$.

الجزء الثاني نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \ ; \ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g

في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 ن | 1 | أ | تحقق أن : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2 \ ; \ (\forall x > 1)$

0,25 ن | 1 | ب | تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt \ ; \ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 1 | ج | بين أن : $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt \ ; \ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(x - \sqrt{x}) h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x}) h(\sqrt{x}) \ ; \ (\forall x > 1)$

2 ب استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 . — 0,50 ن

2 ج بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ — 0,75 ن

3 أ بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$ — 0,75 ن

3 ب استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g . — 0,50 ن

3 ج أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$. — 0,50 ن

الجزء الثالث

I 1 بين أن الدالة : $k : x \longmapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$. — 0,50 ن

I 2 استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$. — 0,25 ن

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$

II 1 أ بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$ — 0,50 ن

II 1 ب بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا . — 0,50 ن

II 1 ج استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$ — 0,75 ن

II 2 أ بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$ — 0,50 ن

II 2 ب بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ — 0,50 ن

II 2 ج استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$ — 0,25 ن