الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة او المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..... .....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل .....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E)\ :\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$

0.25 | أ) تحقق أن $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ هو مميز المعادلة (E)

0.5 | ب) حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن: $b\in\mathbb{R}$)

0.25 | ج) تحقق أن: $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.

لتكن A النقطة التي لحقها a و B النقطة التي لحقها b

0.5 | أ) حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

0.5 | ب) بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$

0.5 | ج) تحقق أن: $arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

0.5 | د) لتكن C نقطة ، لحقها c ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB وتخالف O و A

حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: $x^{1439}\equiv 1436\ [2015]$

0.25 | 1- علما أن: $1=749\times 2015-1051\times 1436$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما.

2- ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015

0.5 | أ) بين أن d يقسم 1436

0.5 | ب) استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما.

0.75 | 3- أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $x^{1440}\equiv 1\ [5]$ و $x^{1440}\equiv 1\ [13]$ و $x^{1440}\equiv 1\ [31]$

(لاحظ أن: $2015=5.13.31$)

0.5 | ب) بين أن: $x^{1440}\equiv 1\ [65]$ ثم استنتج أن: $x^{1440}\equiv 1\ [2015]$

0.5 | 4- بين أن : $x\equiv 1051\ [2015]$

التمرين الثالث:(4 نقط)

نذكر أن $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع: $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E=\left\{M(x)/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي: $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)\mathrm{T}M(y)=M(x+y+1)$

1- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بما يلي: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\quad \varphi(x)=M(x-1)$

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T)

0.5 ب) بين أن (E,T) زمرة تبادلية.

0.5 2- أ) بين أن: $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$

0.5 ب) استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون "$\times$" تبادلي في E

0.5 ج) بين أن القانون "$\times$" توزيعي بالنسبة للقانون "T" في E.

0.5 د) تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في (E,T) و أن I هو العنصر المحايد في $(E,\times)$.

0.25 3- أ) تحقق أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\right)\quad M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I$

0.75 ب) بين أن $(E,\mathrm{T},\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=0$ و $f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right)$ إذا كان $x>0$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0.5 1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) احسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x>0$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

0.25 3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}.

0.25 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y=x$

0.5 ج) أنشئ المنحنى (C). (نأخذ: $e^{-1}=0.4$)

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=e^{-1}$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad u_{n+1}=f(u_n)$

0.5 1- بين بالترجع أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad e^{-1}\leq u_n<1$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.

3- نضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

0.25 أ) بين أن: $e^{-1}\leq l\leq1$

0.5 ب) حدد قيمة l

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

0.25 | 1- أ) بين أن الدالة: $H:x\mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$ دالة أصلية للدالة: $h:x\mapsto x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

0.5 | ب) بين أن: $(\forall x>0)\quad \int_1^x t\ln^2(t)dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$

0,5 | ج) استنتج أن: $(\forall x>0)\quad F(x)=-\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0.25 | 2- أ) بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.5 | ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(0)=\ln 2$ و $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ إذا كان $x>0$

0.5 | 1- أ) بين أن: $(\forall x>0)\ (\forall t\in[x,2x])\quad e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$

0.5 | ب) بين أن: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$

0.25 | ج) استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .

0.75 | 2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم احسب $g'(x)$ من أجل $x>0$

0.5 | 3- أ) بين أن: $(\forall t>0)\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ (يمكنك استعمال هذه التزايدات المنتهية)

0.5 | ب) بين أن: $(\forall x>0)\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

0.5 | ج) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

انتهى